

東大大学院 学員 〇渡辺 正明,

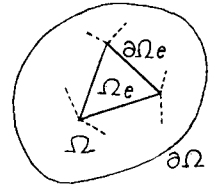
東大生研 ×川井 忠彦

1. きえがき

最近、有限要素法を用いた塑性設計法でいう破壊荷重を簡便に求める手法がいくつか提案されている。^{2),3)} 著者の一人である川井が提案した剛体-スプリングモデルもその一つである。本報告は保存則の立場からその中のモデルの一つである板曲げの要素について説明し、このモデルが塑性設計法に適したモデルであることを示す。

固体力学でいう保存則とは力の釣り合い式のことであるが、これを一つの要素について積分形で表わせば次のようになる(図-1参照)。

$$\iint T_i dS + \iiint F_i dV = 0 \quad (1)$$



ここに、 T_i, F_i はそれぞれ i 軸方向の要素境界上の表面力と要素内の物体力である。保存則モデルでは、上式の表面力と仮定した要素内の変位場とを大胆な差分近似で関連づける。この変位場は回転の項も含む。また、応力ではなく表面力で定式化を行っているため(1)式の他にモーメントの釣り合い式も考慮する必要がある。 ϵ_{ijk} は交代記号である。

$$\iint \epsilon_{ijk} x_j T_k dS + \iiint \epsilon_{ijk} x_j F_k dV = 0 \quad (2)$$

保存則モデルでは一般的に(1)、(2)式の6個の式を直接離散化する。この点ガバネを用いた川井の初期の定式化と異っている。

2. 板曲げの保存則モデル

板曲げ要素は図-2に示されるように各三角形要素について、 z 軸方向の直変位、 x, y 軸回りの回転角の3つの変位パラメータ(w_0, χ_0, ϕ_0)で与える。これらを用いて一つの要素の変位場を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} U &= z\phi_0, & V &= -z\chi_0. \\ W &= w_0 + (y-y_0)\chi_0 - (x-x_0)\phi_0. \end{aligned} \quad (3)$$

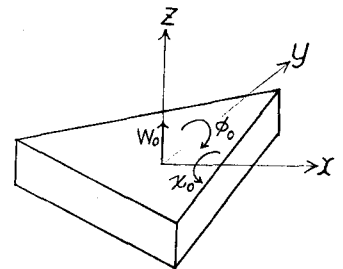


図-2. 剛体変位パラメータ

ここに、 (x_0, y_0) は要素の重心座標を示す。

次にこのモデルでの応力と変位の関係を考える。図-3に示すように $x-y$ 面での要素境界上の外向き法線方向余弦を (l, m) とすれば、 n, s 方向の直変位は(3)式より、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} U_n &= lU + mV = z\theta_s \\ V_s &= -mU + lV = -z\theta_n \end{aligned}$$

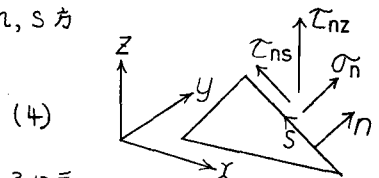


図-3. 要素境界上の応力

ここに、 $\theta_s = l\phi - m\chi$, $\theta_n = m\phi + l\chi$ と定義される。応力は図-3に示す成分を考えて次のような近似式を仮定する。

$$\sigma_n = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial U_n}{\partial n}, \quad \tau_{ns} = G \frac{\partial V_s}{\partial n}, \quad \tau_{nz} = G \frac{\partial W}{\partial n} \quad (4)$$

上式より合応力は板厚方向に積分して次のように表わされる。

$$M_n = \int z \sigma_n dz = D \frac{\partial \theta_s}{\partial n}, \quad M_{ns} = \int z \tau_{ns} dz = -D^* \frac{\partial \theta_n}{\partial n}, \quad Q_z = \int \tau_{nz} dz = Gt \frac{\partial W}{\partial n} \quad (6)$$

ここに、 $D = Et^3/12(1-\nu^2)$, $D^* = Gt^3/12$ で、 t は板厚である。

(5)式を(1), (2)式に代入して図-4の△要素について積分すれば, 次のようになる($F_x = F_y = 0$ とする)。

$$\begin{aligned} \int F_z dV + S Q_z &= 0 \\ \int (y - y_L) F_z dV + Q_z \int (y - y_L) dS - S(m M_m + l M_{ms}) &= 0 \\ \int (x - x_L) F_z dV + S(l M_m - m M_{ms}) - Q_z \int (x - x_L) dS &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

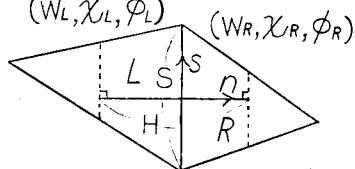
ここに, (x_L, y_L) は△要素の重心座標, S は境界辺の長さを表わす。また, 線積分は $x-y$ 平面で行なう。

(7)式の保存則モデルの釣り合い式を, (6)式の微分を次のように差分で近似することによって変位パラメータで表わすことができる(図-4参照)。

$$M_m \approx \frac{D}{H} (\theta_{sR} - \theta_{sL})$$

$$M_{ms} \approx \frac{D^*}{H} (\theta_{mL} - \theta_{mR})$$

$$Q_z \approx \frac{Gt}{H} \{ W_R + (y - y_R) \chi_R - (x - x_R) \phi_R - W_L - (y - y_L) \chi_L + (x - x_L) \phi_L \}$$

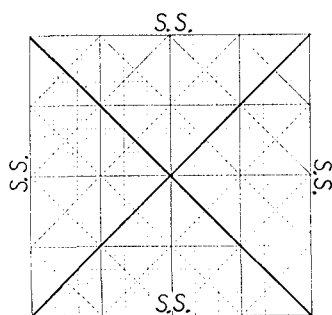
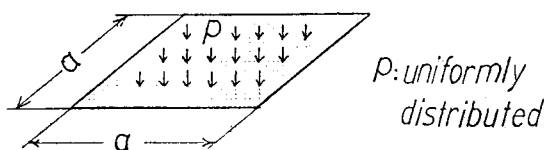


(8) 図-4. 差分近似のための二つの要素

境界上にある点については上の差分式を若干変更する必要がある。

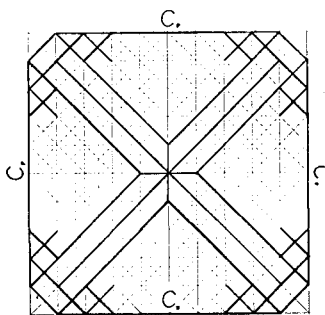
3. 数値計算例

曲げによる崩壊荷重を求める。曲げモーメント M_m が $M_m = M_p (= \sigma_y b^2 / 4, \sigma_y$ は降伏応力) になったら, (8)の初1式の⑤を零にするによって増分計算を行なえばよい。等分布荷重を受ける周辺支持, 固定の板の崩壊荷重が図-5に示されている。周辺支持では浮力の存在する場合も解析したメカニズムのパターンが非常に異なることが確認できた ($t = 2 \text{ cm}, \nu = 0.3, E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \sigma_y = 3 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2, R_0 = 4 \times 10^2 \text{ kg/cm}^2$)。



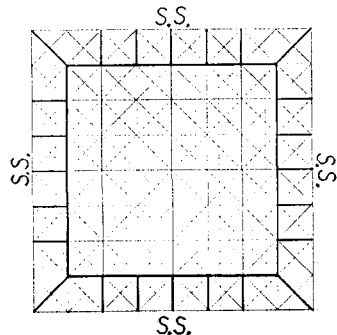
$$\frac{a^2 p}{M_p} = 24$$

支持



$$\frac{a^2 p}{M_p} = 45.666$$

固定



支持 (浮力有り)

図-5. 崩壊のメカニズム

4. あとがき

保存則をいさなり離散化する本モデルは, 各要素に剛体変位場のみ仮定して, 塑性の判定も要素の境界で行なうため塑性設計法という動的解容なメカニズムが容易に表現できる。

< 参考文献 >

- 1, 川井; 新しい離散化モデルと初体構造解析への応用(1), (2), 日本造船学会誌 585号, 587号, 1978.
- 2, 川井, 近藤; 新しい離散化モデルによる板の曲げ崩壊解析, 日本造船学会論文集 142号, 1977.
- 3, 栗生; 東京大学提出学位論文, 1978, 12月.