I-38　トラス構造物の有限変位解析

東京大学　正員　西野文雄
東京大学　学生員　池田清宏

1. まえがき　トラスの有限変位解析については数多くの研究成果が発表されているが、これらの研究の大部分が基本式を増分形式で求め、荷重を漸増させて解を求める手法を採用している。これに反し全荷重と全変位の関係を求め、この非線形の基本式を解いている研究は比較的少なく、2本の棒より成るトラスを扱ったOdenの報告[1]が見られる程度である。ここではトラス構造の全荷重－全変位関係を求め、増分関係を用いずに有限変位の解を求める方法を報告する。

2. 軸力部材の剛性方程式　軸力のみを受ける部材pqを考え、その変位前の状態、および力の作用を受け変位した状態を図1に示す。構造物全体に共通の右手系の直交直線座標(x, y, z)の基ベクトルを

$$\{i\} = \langle i_x\ i_y\ i_z \rangle^T \qquad (1)$$

変位後の部材端$\vec{r}^{\hat{p}}$から$\vec{r}^{\hat{q}}$に向く単位ベクトルを$i_{\hat{x}}$、同様に仮想変位$\mathbb{R}$後の部材端$\vec{r}^{\bar{p}}$から$\vec{r}^{\bar{q}}$に向く単位ベクトルを$i_{\bar{x}}$とし、$i_{\hat{x}}, i_{\bar{x}}$を一つの成分とする任意の右手系の直交単位ベクトルを次の様に表わす。

$$\{\hat{i}\} = \langle i_{\hat{x}}\ i_{\hat{y}}\ i_{\hat{z}} \rangle^T, \quad \{\bar{i}\} = \langle i_{\bar{x}}\ i_{\bar{y}}\ i_{\bar{z}} \rangle \qquad (2)$$

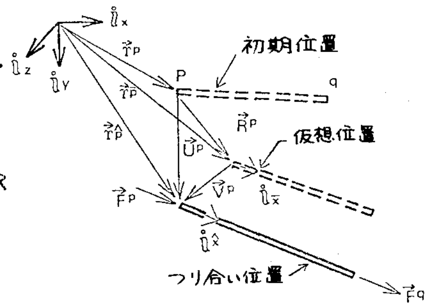


図1　部材位置と基ベクトル

部材pqには分布外力が作用せず、両端にのみ力が働くものとすると力のつり合い式は、軸力をN、$\{\hat{i}\}$系に於る外力を$F_{\hat{x}}^p$, $F_{\hat{x}}^q$として

$$F_{\hat{x}}^p + F_{\hat{x}}^q = 0 \quad , \quad N = -F_{\hat{x}}^p \qquad (3)$$

変位後の部材長$\hat{\ell}$が変位$\mathbb{u}$の関数であることを考えると、ひずみ－変位関係および構成方程式は次の様になる。

$$\varepsilon = (\hat{\ell} - \ell)/\ell \quad , \quad N = EA\varepsilon \qquad (4, 5)$$

$\{\hat{i}\}$系の変位ベクトル成分$u_{\hat{x}}^p$, $u_{\hat{x}}^q$を用いて式(4)の右辺を形式的に変形すると

$$(\hat{\ell} - \ell)/\ell = \frac{1}{\ell}\,\frac{\hat{\ell} - \ell}{u_{\hat{x}}^q - u_{\hat{x}}^p}\,[-1 \quad 1]\begin{Bmatrix} u_{\hat{x}}^p \\ u_{\hat{x}}^q \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

恒等式(6)を用いると(3), (4), (5)は式(7)の剛性方程式で表わされる。

$$\mathbb{F} = \mathbb{K}(\mathbb{u})\,\mathbb{u} \qquad (7)$$

ここに、

$$\mathbb{K}(\mathbb{u}) = \zeta(\mathbb{u})\,\mathbb{T}_{\hat{i}i}^T(\mathbb{u})\,\hat{\mathbb{K}}\,\mathbb{T}_{\hat{i}i}(\mathbb{u}) \qquad (8)$$

$\mathbb{T}_{\hat{i}i}(\mathbb{u})$は$\{i\}$系と$\{\hat{i}\}$系の間の座標変換マトリックス、$\hat{\mathbb{K}}$は微小変位のマトリックスであり、$\zeta(\mathbb{u})$は次式で表わされる。

$$\zeta(\mathbb{u}) = (\hat{\ell} - \ell)/(u_{\hat{x}}^q - u_{\hat{x}}^p) \qquad (9)$$

変位ベクトル$\mathbb{u}$を定ベクトル$\mathbb{R}$と$\mathbb{v}$に分けると、

$$\mathbb{u} = \mathbb{R} + \mathbb{v} \qquad (10)$$

定変位ベクトル$\mathbb{R}$として、変位$\mathbb{R}$を生じた状態で部材長が変化しない条件および$i_{\bar{x}}$と$i_{\hat{x}}$が近似的に等しい条件を満たすものを考える。すなわち

$$\bar{\ell} = \ell \quad , \quad i_{\bar{x}} \approx i_{\hat{x}} \qquad (11, a, b)$$

(10), (11, a, b)を用いて式(7)を線形化すると

$$\mathbb{F} = \mathbb{K}^R(\mathbb{R})\,\mathbb{u} - \mathbb{F}^\circ(\mathbb{R}) \qquad (12)$$

ここに、

$$\mathbb{F}^\circ(\mathbb{R}) = \mathbb{K}^R(\mathbb{R})\,\mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{K}^R(\mathbb{R}) = \mathbb{T}_{\bar{i}i}^T(\mathbb{R})(\hat{\mathbb{K}} + \hat{\mathbb{K}}_G)\,\mathbb{T}_{\bar{i}i}(\mathbb{R}) \qquad (13)$$

$\mathbb{T}_{\bar{i}i}(\mathbb{R})$は$\{i\}$系と$\{\bar{i}\}$系の間の座標変換マトリックス，$\hat{\mathbb{K}}_G$は幾何剛性マトリックスである。式(13)中の$\mathbb{K}^R(\mathbb{R})$は$i_{\bar{x}} = i_{\hat{x}}$のときには幾何剛性マトリックスを省略した式$\mathbb{K}^R(\mathbb{R}) = \mathbb{T}_{\bar{i}i}^T(\mathbb{R})\,\hat{\mathbb{K}}\,\mathbb{T}_{\bar{i}i}(\mathbb{R})$となる。

条件(11)を式で表わすと

$$\vec{R}^{g} = \left(\frac{l}{\ell} - 1\right)(\vec{r}^{g} - \vec{r}^{P}) + \frac{l}{\ell}(\vec{u}^{g} - \vec{u}^{P}) + \vec{R}^{P} \tag{14}$$

従って、式(7)は式(12), (14)により近似されたことになる。さらに $\ell_{元} = \ell_{全}$ のときは式(7)と式(12), (14)とは一致する。式(12), (14)は(7)を逐次近似法で解くのに便利な形にしたといえる。

3. 変位ベクトル$\mathbb{R}$の逐次近似による数値解　トラス構造に作用する外力$\mathbb{F}$を定ベクトル$\mathbb{f}$と外力の大きさを表わす係数fとの積で表わす。

$$\mathbb{F} = f\,\mathbb{f} \tag{15}$$

(12)に(15)を用い、変位$\mathbb{U}$について解くと

$$\mathbb{U} = f\,\mathbb{U}_{f}(\mathbb{R}) + \mathbb{U}_{F^{0}}(\mathbb{R}) \tag{16}$$

ここに、

$$\mathbb{U}_{f}(\mathbb{R}) = [\mathbb{K}^{R}(\mathbb{R})]^{-1}\mathbb{f} \quad , \quad \mathbb{U}_{F^{0}}(\mathbb{R}) = [\mathbb{K}^{R}(\mathbb{R})]^{-1}\mathbb{F}^{0}(\mathbb{R}) \tag{17}$$

(16)は$\mathbb{U}$、fを未知量とする線形の連立方程式となるが、未知数の数が式の数より1つ多く、f, $\mathbb{U}$のうち1つを与える必要がある。その一つとして　a) fを与える、 b) $\mathbb{U}$の成分のうちの1つを与える、 c) $\mathbb{U}$のノルムを与える、等が可能である。

4. 逐次近似法の収束性　1次元の逐次近似計算(18)の収束の必要条件は式(19)で与えられる[2)]

$$v = g(v) \tag{18}$$

$$|g'(v)| \leq 1 \tag{19}$$

多次元の逐次近似計算の収束性についても同様に表わされる。

5. 数値計算例　図2に示す2バートラスに鉛直荷重のみを与える場合、荷重－たわみ曲線は図3に示されるようになり、(12), (14)は1次元の逐次計算問題となる。3.の a)の方法でfを与えた場合極大点A, 極小点Cを除く荷重－変位曲線上の点は解の近辺の初期値に対し条件(19)を満たす。次に(12)を計算する際、(13)で$\hat{\mathbb{K}}_{G}$を省略すると、解の近辺の初期値に対し、不安定領域A～C上の点は(19)を満たさず、安定領域の点は(19)を満足する。このことは数値的にも裏付けられており、(19)を満足する点では逐次計算は収束し、満足しない点では発散した。図2の2バートラスに鉛直・水平両方向の荷重を与えるとき、3.で説明したa), b), c)の方法を用い、与えるパラメーターの値をそれぞれ零から漸増させて荷重－たわみ曲線を求めた例を図4に示す(初期値は原点0を用いた) もう少し複雑な構造の例として図5に示す6バートラスの荷重－変位曲線を中央点の鉛直変位を与える方法で求めた例を図6に示す。

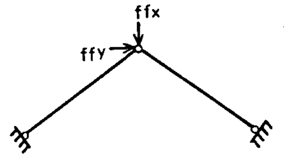
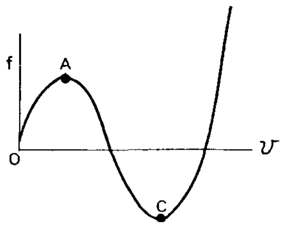
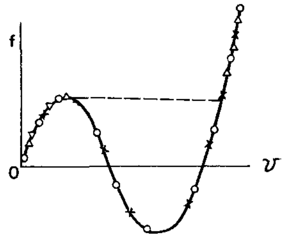


図2　2バートラス



v: 鉛直方向の変位
図3　2バートラスの荷重－変位曲線



▽ fの値を与えた場合
△　　〃　　($\hat{\mathbb{K}}_{G}$を省略)
○ $\mathbb{U}$の1つの成分を与えた場合
× $\mathbb{U}$のノルムを与えた場合
図4　6バートラスの荷重－変位曲線

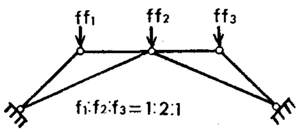
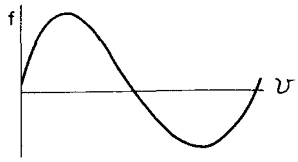


図5　6バートラス



v: 中央点の鉛直方向の変位
図6　6バートラスの荷重－変位曲線

参考文献

1) J. T. ODEN
FINITE ELEMENT THEORY OF NONLINEAR CONTINUA

2) F. B. HILDEBRAND
NUMERICAL ANALYSIS
Second Edition