

早稲田大学 正員 依田 昭彦
早稲田大学 正員 平嶋 政治
早稲田大学 学生員 井浦 雅司

1. よえかき

本報告では、前回の年次講演会で報告済みの薄肉空間曲線部材の有限変位場に関する考察²⁾を発展させ、横断面形状が閉断面部のみならず開断面部を有する薄肉空間曲線部材の一次元有限変位理論を展開した。さらに、有限変位理論の妥当性を確かめるため、分岐形安定問題（座屈問題）を扱い、曲率面内に等曲げを受け両端で単純支持されている薄肉二軸対称断面円弧部材の横倒れ座屈問題を例題として解き、既往の研究結果²⁾と比較した。

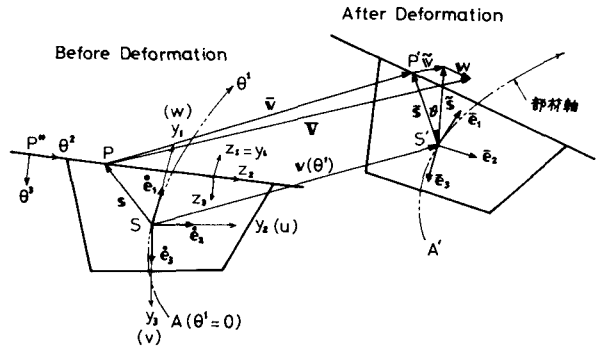


図-1 座標系・基底ベクトル・変位ベクトル

2. 変位場・ひずみ場

全変位ベクトル $\mathbf{V}$ を平面的な変位ベクトル $\bar{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}$ とそれに伴う変位ベクトル $\mathbf{w}$ に分け³⁾、さらに、変形前の基底ベクトル方向に変位成分を分け⁴⁾

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{w} = w \hat{\mathbf{e}}_1 + u \hat{\mathbf{e}}_2 + v \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1)$$

とおけば、薄肉直線部材の解析で使用されている仮定⁴⁾を基礎に、変位成分はそれぞれ

$$w = v^1 - y_2 \Gamma_2 - y_3 \Gamma_3 - \omega \Gamma_\theta, \quad u = v^2 - y_2 A_2 - y_3 A_3 - \omega A_\theta, \quad v = v^3 + y_2 B_2 - y_3 B_3 - \omega B_\theta \quad (2a-c)$$

とかける。⁵⁾ここに、 v^1, v^2, v^3 は部材軸上の点の $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ 方向の変位であり、それ関数 ω は開区間と閉区間に對し、

$$\omega = \frac{h_s}{\sqrt{g}} \theta^3 + \sqrt{g} \int_{\theta_s^*}^{\theta^2} \frac{h_n}{g} d\theta^2 : \text{開区間}^{5)} ; \quad \omega = \frac{h_s}{\sqrt{g}} \theta^3 + \sqrt{g} \int_{\theta_s^*}^{\theta^2} \left\{ \frac{h_n}{g} - \frac{\frac{h_n}{g} d\theta^2}{\int \frac{1}{g\sqrt{g}} d\theta^2} \cdot \frac{1}{g\sqrt{g}} d\theta^2 \right\} d\theta^2 : \text{閉区間} \quad (3a, b)$$

と表わす、 $\Gamma_2 = \cos \vartheta v^2_{1,1} + \sin \vartheta v^2_{1,2}$, $\Gamma_3 = \cos \vartheta v^3_{1,1} - \sin \vartheta v^3_{1,2}$, $\Gamma_\theta = \vartheta_{,1} + \frac{1}{2} (v^2_{1,1})^2 + \frac{1}{2} (v^3_{1,1})^2 - \frac{1}{2} \kappa_1 [(v^2_{1,1})^2 + (v^3_{1,1})^2] + \kappa_2 v^2_{1,1} + \kappa_3 v^3_{1,1}$, $A_2 = 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^2_{1,1} \Gamma_2$, $A_3 = \sin \vartheta + \frac{1}{2} v^3_{1,1} \Gamma_3$, $A_\theta = v^2_{1,1} \Gamma_\theta$, $B_2 = \sin \vartheta - \frac{1}{2} v^2_{1,1} \Gamma_2$, $B_3 = 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^3_{1,1} \Gamma_3$, $B_\theta = v^3_{1,1} \Gamma_\theta$ (4a, b)

$$\Gamma_\theta = \vartheta_{,1} + \frac{1}{2} (v^2_{1,1})^2 + \frac{1}{2} (v^3_{1,1})^2 - \frac{1}{2} \kappa_1 [(v^2_{1,1})^2 + (v^3_{1,1})^2] + \kappa_2 v^2_{1,1} + \kappa_3 v^3_{1,1} \quad (4c)$$

$$A_2 = 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^2_{1,1} \Gamma_2, \quad A_3 = \sin \vartheta + \frac{1}{2} v^3_{1,1} \Gamma_3, \quad A_\theta = v^2_{1,1} \Gamma_\theta \quad (4d-f)$$

$$B_2 = \sin \vartheta - \frac{1}{2} v^2_{1,1} \Gamma_2, \quad B_3 = 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^3_{1,1} \Gamma_3, \quad B_\theta = v^3_{1,1} \Gamma_\theta \quad (4g-i)$$

である。ただし、縦棒は変位微分を示し、 κ_1 : 初期ねじり率、 κ_2, κ_3 : 初期曲率、 t : 板厚、 $(\cdot)_{,1} = \partial(\cdot)/\partial \theta^1$ 、 $h_s = \dot{y}_2 \dot{y}_{2,2} + \dot{y}_3 \dot{y}_{3,2}$, $h_n = \dot{y}_2 \dot{y}_{3,2} - \dot{y}_3 \dot{y}_{2,2}$, $\sqrt{g} = 1 + \kappa_2 \dot{y}_3 - \kappa_3 \dot{y}_2$, $\sqrt{g} = 1 + \kappa_2 y_3 - \kappa_3 y_2$ (5a-d)

である。

ひずみテンソルは、局所座標系 (x_1, x_2, x_3) を用い、3次以上の高次微小項を無視すれば、

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\Gamma_\theta - y_2 \omega_{,1} - y_3 \omega_{,2} - \omega \omega_{,3} + H \Gamma_\theta + R \frac{\Gamma_\theta^2}{2}), \quad 2\varepsilon_{12} = -\frac{\Theta}{\sqrt{g}\sqrt{g}} \Gamma_\theta, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (6a-f)$$

と表わせる。⁵⁾ここに、

$$\Gamma_\theta = v^2_{1,1} + \frac{1}{2} (v^2_{1,1})^2 + \frac{1}{2} (v^3_{1,1})^2, \quad \omega_{,1} = \Gamma_{2,1} - \Gamma_3 \Gamma_\theta - \kappa_2 \sin \vartheta - \kappa_3 (1 - \cos \vartheta) - \kappa_1 \Gamma_3, \quad \omega_{,2} = \Gamma_{3,1} + \Gamma_2 \Gamma_\theta - \kappa_3 \sin \vartheta + \kappa_2 (1 - \cos \vartheta) + \kappa_1 \Gamma_2,$$

$$\omega_{,3} = \Gamma_{\theta,1}, \quad H = \frac{\kappa_1}{\sqrt{g}} [(y_2)^2 + (y_3)^2 + \kappa_2 y_2 \omega + \kappa_3 y_3 \omega + \frac{\Theta}{\sqrt{g}} (y_2 \dot{y}_{3,2} - y_3 \dot{y}_{2,2})] - \omega_{,1}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{g}} [(y_2 + \kappa_2 \omega)^2 + (y_3 + \kappa_3 \omega)^2],$$

$$\Theta = \theta^3 (2 + \frac{\kappa_2 \dot{y}_{2,2} + \kappa_3 \dot{y}_{3,2}}{\sqrt{g}} \theta^3) : \text{開区間} ; \quad \Theta = \theta^3 (2 + \frac{\kappa_2 \dot{y}_{2,2} + \kappa_3 \dot{y}_{3,2}}{\sqrt{g}} \theta^3) - \frac{\frac{h_n}{g} d\theta^2}{\int \frac{1}{g\sqrt{g}} d\theta^2} \cdot \frac{g}{g} \cdot \frac{1}{g} : \text{閉区間} \quad (7a-i)$$

である。

3. フリ合い式と境界条件

部材両端における外力の $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 方向の成分を $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ とし、分布外力の $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 方向の成分を P_1, P_2, P_3 とすれば、仮想仕事の原理は次のようにかける。⁵⁾

$$\iiint_V (\sigma^{11} \delta \varepsilon_{11} + 2 \sigma^{12} \delta \varepsilon_{12}) \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 - \iiint_V (P_1 \delta w + P_2 \delta u + P_3 \delta v) \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 - \left[\iint_A (\bar{P}_1 \delta w + \bar{P}_2 \delta u + \bar{P}_3 \delta v) d\theta^1 d\theta^2 \right]_{\theta^1 = \theta_1^*}^{\theta^1 = \theta_2^*} = 0 \quad (8)$$

ここに、 σ^{11} と σ^{12} は局所デカルト座標系 (x_1, x_2, x_3) における応力テンソルである。変分原理より、フリ合い式は、

$$\begin{aligned} \delta v^1: & N_{,1} - N(X_3 v^1_{,1} - X_2 v^1_{,2}) + (M_{3,1} + X_1 M_2 + M_2 \bar{P}_3 X_3 \cos \vartheta - X_2 \sin \vartheta) + (M_{2,1} - X_1 M_3 - M_3 \bar{P}_3)(X_2 \cos \vartheta + X_3 \sin \vartheta) \\ & + \frac{1}{2} X_3 (M_1 v^1_{,1})_{,1} + \frac{1}{2} X_3 M_1 (v^1_{,1})_{,1} + \frac{1}{2} X_2 (M_1 v^1_{,2})_{,1} + \frac{1}{2} X_2 M_1 (v^1_{,2})_{,1} + X_2 M_1 (X_3 v^1_{,1} - X_2 v^1_{,2}) + N^* \\ & + M_3^* (X_3 \cos \vartheta - X_2 \sin \vartheta) + M_2^* (X_2 \cos \vartheta + X_3 \sin \vartheta) = 0, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \delta v^2: & -X_3 N - [N v^1_{,1}]_{,1} + X_1 N v^1_{,1} + [M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta]_{,1} + [X_1 (M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta)]_{,1} + X_2 [M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta]_{,1} \\ & - (X_1)^2 (M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta) + [X_2 (M_2 \bar{P}_2 + M_3 \bar{P}_3)]_{,1} - X_3 X_2 (M_2 \bar{P}_2 + M_3 \bar{P}_3) - [X_2 M_2]_{,1} + X_2 X_3 M_1 + \frac{1}{2} [M_1 v^1_{,1}]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} [M_1 (v^1_{,1})_{,1}]_{,1} + [X_1 M_1 v^1_{,1}]_{,1} + \frac{1}{2} X_1 (M_1 v^1_{,1})_{,1} + \frac{1}{2} M_1 (v^1_{,1})_{,1} + (X_1)^2 M_1 v^1_{,1} + [M_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta]_{,1} \\ & + X_2 (M_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta) - [X_2 H \bar{\omega}]_{,1} + X_1 X_3 H \bar{\omega} - Q_2^* = 0, \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} \delta v^3: & X_2 N - X_1 N v^1_{,1} - [N v^1_{,2}]_{,1} - [M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta]_{,1} + [X_1 (M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta)]_{,1} + X_1 [M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta]_{,1} \\ & + (X_1)^2 (M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta) + [X_3 (M_2 \bar{P}_2 + M_3 \bar{P}_3)]_{,1} + X_1 X_2 (M_2 \bar{P}_2 + M_3 \bar{P}_3) - [X_3 M_2]_{,1} - X_1 X_2 M_1 + \frac{1}{2} [M_1 v^1_{,2}]_{,1} \\ & - \frac{1}{2} [M_1 (v^1_{,2})_{,1}]_{,1} + [X_1 M_1 v^1_{,2}]_{,1} + \frac{1}{2} X_1 [M_1 v^1_{,2}]_{,1} + \frac{1}{2} X_1 M_1 (v^1_{,2})_{,1} - (X_1)^2 M_1 v^1_{,2} - [M_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta]_{,1} \\ & + X_2 (M_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta) - [X_3 H \bar{\omega}]_{,1} - X_1 X_2 H \bar{\omega} - Q_3^* = 0, \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} \delta \vartheta: & -M_3 (X_2 \cos \vartheta + X_3 \sin \vartheta) + M_2 (X_3 \cos \vartheta - X_2 \sin \vartheta) - M_{2,1} + M_3 [(v^1_{,1})_{,1} \cos \vartheta - (v^1_{,1})_{,1} \sin \vartheta] + M_2 [(v^1_{,1})_{,1} \cos \vartheta + (v^1_{,1})_{,1} \sin \vartheta] \\ & + X_1 (M_3 \bar{P}_2 - M_2 \bar{P}_3) - H \bar{\omega}_{,1} - M_3^* (v^1_{,1} \cos \vartheta - v^1_{,1} \sin \vartheta) - M_2^* (v^1_{,1} \cos \vartheta + v^1_{,1} \sin \vartheta) - m_\vartheta^* = 0 \end{aligned} \quad (9d)$$

となる。ここに、 $M_1 = H \omega_{,1} + Z + T + M_2 \bar{P}_3$ であり、 $(\)^*$ は外力に関する項を示している。⁵⁾

4. 薄肉平面円弧部材の横倒れ座屈 ($X_1 = X_3 = 0, X_2 = \text{const.}$)

曲率面内 ($y_1 y_3$ 面内) に荷重を受け、その面内にもみ変位する部材を考える。この条件のもとでは、次式が成立する。

$$v^2 = v^3 = 0, \quad M_1 = M_3 = 0, \quad v^1 \neq 0, \quad v^2 \neq 0, \quad M_2 \neq 0, \quad N \neq 0 \quad (10a \sim h)$$

分岐形安定問題 (座屈問題) の支配方程式は、増分理論を用いて求めること加で、⁶⁾ 本報告の横倒れ座屈問題に増分理論と適用すれば、横倒れ座屈の支配方程式は、式(10)を考慮して、

$$-[N \Delta v^1_{,1}]_{,1} + \Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta_{,1} + [X_2 (M_2 \Delta \bar{P}_2 + M_3 \Delta \bar{P}_3)]_{,1} - [X_2 \Delta M_2]_{,1} + \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^1_{,1})_{,1}]_{,1} + \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^1_{,1})_{,1}]_{,1} + [M_2^* \Delta \vartheta]_{,1} = 0, \quad (11a)$$

$$-X_2 (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) - \Delta M_{1,1} + (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) (v^1_{,1})_{,1} + M_2 \Delta (v^1_{,1})_{,1} - M_2^* (\Delta v^1_{,1} + v^1_{,1} \Delta \vartheta) = 0 \quad (11b)$$

とかける。ここに、 $\Delta(\)$ は微小増分量を示す。

横倒れ座屈に対する支配方程式の妥当性を確かめるために、部材の両端で等曲げ $\bar{P}_2$ のみを受けている両端単純支持の二軸対称断面円弧部材を考える。この条件のもとでは、式(10)において

$$M_2 = \bar{M}_2 = -EI_2 (v^1_{,1})_{,1}, \quad N = 0 \quad (12a \sim c)$$

とおける。したがって、式(11)と $\Delta \bar{P}_2$ について整理すれば、横倒れ座屈の支配方程式は

$$EI \omega \Delta \bar{P}_{2,11} - GJ_t \Delta \bar{P}_{2,11} + [X_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_2} - \frac{\bar{P}_2^*}{EI_2}] [\bar{M}_2^* \Delta \bar{P}_2 + (EI \omega \Delta \bar{P}_{2,11} - GJ_t \Delta \bar{P}_{2,11}) (X_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_2})] = 0 \quad (13)$$

となり、この式の固有値として、横倒れ座屈 $\omega - \lambda = 0$ と

$$\bar{M}_2^* = \frac{-X_2 (1 - \frac{2\beta}{EI_2} + \frac{\beta}{EI_2}) \pm \sqrt{(X_2)^2 (1 - \frac{2\beta}{EI_2} + \frac{\beta}{EI_2})^2 - 4\beta [\lambda^2 - (X_2)^2] (1 - \frac{\beta}{EI_2} X (\frac{1}{EI_2} - \frac{1}{EI_2}))}}{2 (1 - \frac{\beta}{EI_2} X (\frac{1}{EI_2} - \frac{1}{EI_2}))} \quad (14)$$

が求まる。ここに、 $\beta = EI \omega \lambda^2 + GJ_t$, $\lambda = m\pi/l$ (m : 正の整数, l : 部材軸に沿った円弧の長さ) である。

式(14)は文献2)のフリ合い法により求められた座屈値と一致しており、座屈前変位の影響をも含んでいる。

参考文献

- 1) 依田・平嶋・井浦: 第33回土木学会年次学術講演会, 1978.
- 2) Vacharajitiphan & Trahair: Proc. ASCE, Vol. 101, ST6, 1975.
- 3) Schroeder: Ingenieur-Archiv, Band 39, 1970.
- 4) 西野・島方・長谷川・奥村: 土木学会論文報告集, No. 225, 1974.
- 5) 依田・平嶋・井浦: 第28回応用力学連合講演会, 1978.
- 6) 薄木: 土木学会論文報告集, No. 263, 1977.