I-34　有限変形問題に関する基本的考察

早大大学院　学　井浦雅司
早稲田大学　正　平嶋政治
早稲田大学　正　依田照彦

1．まえがき．　有限変形問題を扱う際には，既に指摘されているように，変形前と変形後の状態を区別し，さらにどのような座標系及び表現方法を採用するかを明確にする必要がある。変形の記述においては，複雑な式を扱うことが多く，それらを簡単化する目的で様々な名称のついた応力テンソルや歪テンソルが導入されている。応力テンソルに関しては各種のテンソルが定義されており，それらがどのような物理的意味をもち，さらにどの様に式が簡略化されるかについては未だ明確にされていないように思われる。本報告においては，有限変形解析において従来用いられている応力テンソルについて，それぞれの物理的意味及び関係について考察を行ない，さらに変形の記述においてそれら応力テンソルがどのように利用されるかを調べる．

2．座標系．　変形前の状態を Fig. 1-a に，変形後の状態を Fig. 1-b に示す。座標系a^iは変形前において空間に固定された座標系を示し，座標系x^iは変形後において空間に固定された座標系である。これらの座標系を用いると，変形前の物体点Pは$(a^1 a^2 a^3)$と表わされ，変形後に点Qへ移動し$(x^1 x^2 x^3)$と表わされる。一方，座標系y^iは物体に埋込まれた座標系であり，点P及び点Qは共に$(y^1 y^2 y^3)$と表わされ，変形前後においてその座標値は変わらない。ここでは，a^i及びx^iを空間座標系，y^iを埋込み座標系と呼ぶ。なお，後述するように，変形の記述をa^iで行なう時にa^iをLagrange座標，x^iで行なう時に[2)] x^iをEuler座標と呼ぶ場合もあるが，ここでは文献(1)と同じ立場をとり，上記の表現は用いないことにする。

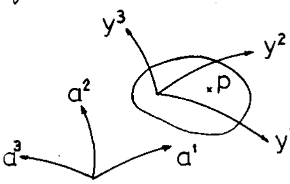

Fig.1－a

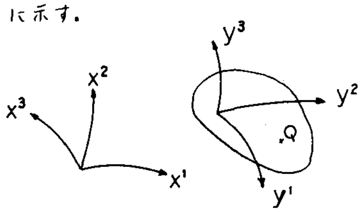

Fig.1－b

3．表現方法．　空間座標系を用いて解析を行なう場合には，変形前の座標a^iを用いるか，変形後の座標x^iを用いるかによって式の形は異なる。ここでは変形前の座標a^iを用いる時にLagrangeの方法，変形後の座標x^iを用いる時にEulerの方法と呼ぶ。埋込み座標系を用いる場合には，変形前後において物体点の座標値は変化しないので，上記のような表現方法の区別はない．以上のことより，有限変形問題においては，座標系に関しては空間座標系なのか埋込み座標系なのかを明らかにし，さらに空間座標系を用いる場合には，Lagrangeの方法又はEulerの方法のいずれを採用しているかを示せばよいことがわかる。

4．幾何量及び各種テンソル．　表1に各方法における幾何量及び各種テンソルを示す。

＜表1＞

座標系 / 表現方法	空間座標系		埋込み座標系
	Lagrangeの方法	Eulerの方法	
座標値	a^i	x^i	y^i
基底ベクトル	変形前：$\mathbf{e}_i=\partial\mathbf{r}/\partial a^i$　変形後：$\mathbf{E}_i=\partial\mathbf{R}/\partial a^i$	$\mathbf{A}_i=\partial\mathbf{R}/\partial x^i$	変形前：$\mathbf{g}_i=\partial\mathbf{r}/\partial y^i$　変形後：$\mathbf{G}_i=\partial\mathbf{R}/\partial y^i$
計量テンソル	$e_{ij}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$, $e=\lvert e_{ij}\rvert$, $E_{ij}=\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{E}_j$, $E=\lvert E_{ij}\rvert$	$A_{ij}=\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{A}_j$, $A=\lvert A_{ij}\rvert$	$g_{ij}=\mathbf{g}_i\cdot\mathbf{g}_j$, $g=\lvert g_{ij}\rvert$, $G_{ij}=\mathbf{G}_i\cdot\mathbf{G}_j$, $G=\lvert G_{ij}\rvert$
面素	変形前：$\mathring{\epsilon}_{ijk}\sqrt{e^{kk}}\,da^i da^j$ 変形後：$\epsilon_{ijk}\sqrt{E^{kk}}\,da^i da^j$	$\hat{\epsilon}_{ijk}\sqrt{A^{kk}}\,dx^i dx^j$	変形前：$\mathring{\bar{\epsilon}}_{ijk}\sqrt{g^{kk}}\,dy^i dy^j$ 変形後：$\bar{\epsilon}_{ijk}\sqrt{G^{kk}}\,dy^i dy^j$
体素	変形前：$\sqrt{e}\,da^i da^j da^k$	$\sqrt{A}\,dx^i dx^j dx^k$	変形前：$\sqrt{g}\,dy^i dy^j dy^k$

体　素	変形後： $\sqrt{E}\, da^i da^j da^k$		変形後： $\sqrt{G}\, dy^i dy^j dy^k$
変位ベクトル$\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}=\mathbf{R}-\mathbf{r}$)	$\mathbf{U}=u^i\mathbf{e}_i=u_i\mathbf{e}^i$ $=U^i\mathbf{E}_i=U_i\mathbf{E}^i$	$\mathbf{U}=V^i\mathbf{A}_i=V_i\mathbf{A}^i$	$\mathbf{U}=w^i\mathbf{g}_i=w_i\mathbf{g}^i$ $=W^i\mathbf{G}_i=W_i\mathbf{G}^i$
歪テンソル	$\frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial a^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial a^j}-e_{ij}\right)$	$\frac{1}{2}\left(A_{ij}-e_{\alpha\beta}\frac{\partial a^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial a^\beta}{\partial x^j}\right)$	$\frac{1}{2}\left(G_{ij}-g_{ij}\right)$
応力テンソル	$R^{km}\mathbf{e}_m\mathring{\epsilon}_{ijk}\,da^i da^j$ $T^{km}\mathbf{E}_m\mathring{\epsilon}_{ijk}\,da^i da^j$ $M^{km}\mathbf{E}_s\,\partial a^s/\partial x^m\,\mathring{\epsilon}_{ijk}\,da^i da^j$ $Q^{km}\mathbf{e}_m\,\epsilon_{ijk}\,da^i da^j$ $P^{km}\mathbf{E}_m\,\epsilon_{ijk}\,da^i da^j$ $N^{km}\mathbf{E}_s\,\partial a^s/\partial x^m\,\epsilon_{ijk}\,da^i da^j$	$\sigma^{km}\mathbf{A}_m\widetilde{\epsilon}_{ijk}\,dx^i dx^j$	$t^{km}\mathbf{g}_m\mathring{\bar{\epsilon}}_{ijk}\,dy^i dy^j$ $S^{km}\mathbf{G}_m\mathring{\bar{\epsilon}}_{ijk}\,dy^i dy^j$ $\pi^{km}\mathbf{g}_m\bar{\epsilon}_{ijk}\,dy^i dy^j$ $\tau^{km}\mathbf{G}_m\bar{\epsilon}_{ijk}\,dy^i dy^j$

$\mathring{\epsilon}_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{e}$, $\epsilon_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{E}$, $\epsilon_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{A}$ $\mathring{\bar{\epsilon}}_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{g}$, $\bar{\epsilon}_{ijk}=e_{ijk}\sqrt{G}$,

e_{ijk} : permutation symbols

5．応力テンソル．　表2に応力テンソルがどのような名称で呼ばれているかを示す。

＜ 表２ ＞

R^{ij}	Lagrange[3)7)10)15)], Piola[10)14)], 1st Piola-Kirchhoff[10)]	σ^{ij}	Euler[3)7)9)15)], Cauchy[14)], true stress[8)]
T^{ij}	Kirchhoff[3)7)9)15)], Piola-Kirchhoff[7)14)], pseudo-stress[7)9)10)],	t^{ij}	Lagrange[5)8)]
M^{ij}	Lagrange[3)] ／ 2nd Piola-Kirchhoff[10)], generalized stress[9)10)11)]	S^{ij}	Kirchhoff[5)6)8)], Piola-Kirchhoff[8)], generalized stress[11)], 2nd Piola-Kirchhoff[13)]
Q^{ij}	──→（埋込み座標系の π^{ij} に相当する。）		
P^{ij}	actual stress[9)11)]	π^{ij}	16)
N^{ij}	1st Piola-Kirchhoff[4)]	τ^{ij}	2nd Piola-Kirchhoff[4)], Cauchy[6)], Euler[8)], actual stress[11)12)]

各応力テンソルの関係式を求めるが，ここでは文献（3）とは別の方法による。微小四面体における力の釣合いより，力 $d\mathbf{F}$ と応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}$とは $d\mathbf{F}=\boldsymbol{\sigma}dS$ と表わされ，さらに $\boldsymbol{\sigma}dS=\boldsymbol{\sigma}_i dS_i$ という関係式が成り立つ。まず応力テンソル T^{ij} と σ^{ij} との関係を求めると，

$$2\,d\mathbf{F}=T^{km}\mathbf{E}_m\mathring{\epsilon}_{ijk}\,da^i da^j=\sigma^{\gamma\rho}\mathbf{A}_\rho\,\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma}\,dx^\alpha dx^\beta \qquad (1)$$

が成り立ち，さらに右辺の2項を書き直す。

$$T^{km}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial a^m}\frac{1}{dx^\gamma}\frac{\partial x^\gamma}{\partial a^k}\mathring{\epsilon}_{ijk}\,da^i da^j da^k=\sigma^{\gamma\rho}\mathbf{A}_\rho\frac{1}{dx^\gamma}\widetilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma}\,dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma \qquad (2)$$

ここで質量保存則を用いると（ $\rho dV=\rho_0 dV_0$ ），次の関係式が得られる[3)]。

$$\sigma^{\gamma\rho}=T^{km}\frac{\partial x^\rho}{\partial a^m}\frac{\partial x^\gamma}{\partial a^k}\frac{\rho}{\rho_0} \qquad (3)$$

6．おわりに．　力の釣合式及びそれより導かれる仮想仕事の原理等において，上記の応力テンソルがどのように用いられるかは当日発表する予定である。

＜参考文献＞

1). C. Truesdell : J. Rat. Mech. Anal. **1** (1952)
2). 佐武正雄 : 土木学会論文集 No. 134
3). Y.C. Fung : 固体の力学（培風館）
4). J.T. Oden : Finite Elements of Nonlinear Continua
5). M.C. Dökmeci : Int. J. Solids Structures, 1972, Vol. 8
6). M. Epstein 他 : Int. J. Solids Structures, 1976, Vol. 12
7). 山田嘉昭 : 塑性・粘弾性（培風館）
8). 坪井善勝他 : 建築学会大会学術講演梗概集, 昭45年9月
9). 鷲津久一郎 : 弾性学の変分原理概論（培風館）
10). K. Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity
11). V.V. Novozhilov : Theory of Elasticity
12). 吉村慶丸 : 日本機械学会論文集 26巻 167号
13). 山本善之 : 日本機械学会第865回講演会講演要旨集
14). A.C. Eringen : Mechanics of Continua
15). W. Prager : Introduction to Mechanics of Continua
16). A.E. Green 他 : Theoretical Elasticity