

明石高専 正員 高 端 宏 直
 近畿大学 正員 谷 平 勉
 中部工大 正員 倉 田 宗 章

1) まえがき……既に板の差分化した式と Boussinesq の理論式と結合し弾性体上の板の近似解⁽¹⁾を求め、更にこれと LEE の対応原理を応用して粘弾性体上の場合について近似解⁽²⁾を求めた。既報では Kelvin と Maxwell モデルについて求めたが、今回はそれらの中間的な性質をもつ Standard Solid モデル⁽⁴⁾(図-1)の場合を解析したので報告する。

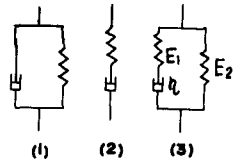


図-1. モデル
 KELVIN MAXWELL
 STANDARD
 SOLID

2) 解式の誘導……はじめに弾性体の場合を簡単に列挙する。板は図-2に示す様に、周辺自由で集中荷重 P の中央点載荷と等分布荷重 ($q = d\lambda^2 P$) の全面載荷の2

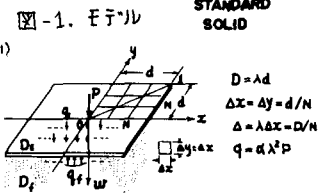


図-2. 板の諸元

種を考へ、半辺長 d を N 分割する。板の差分式は $D_s/\Delta x^2 [K] \{w\} = \{\bar{q}\} - \{q_f\}$ (1) で地盤反力と弾性体表面の変位との関係(図-3)は $w_{ni} = q_f \Delta x^2 / D_f \cdot f_{ni}$ (2)

ここで $f_{ni} = 3.525$, $f_{ni} = 1/r_n$, $D_f = \pi E_0 / (1 - \nu_0^2)$ 。マトリックス表示をすれば、

$\{w_f\} = \frac{\Delta x^2}{D_f} \{f_f\} \{q_f\}$ または $\{q_f\} = \frac{D_f}{\Delta x^2} [K_f] \{w_f\}$ (3) となる。ここで $[K_f] = [f_f]$ である。よって $\{w_f\} = \{w_f\}$ とし (1), (3) 式より $([K] + \delta_0 [K_f]) \{w\} = \{\bar{q}\}$ (4) $\bar{q} = \frac{P}{d\lambda^2} (\alpha_0 + \beta_0 \frac{\Delta x}{d})$

とする。地盤内の鉛直応力度(図-4)は $\{\sigma_z\} = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \{q_f\} \{r\}$ (5) で表わされ $\{r\}$ は $z_j^3 / (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{5/2}$ を要素とするベクトルである。ここで、 $\lambda^3 = D_f / D_s$, $\Delta^3 = \lambda_0$, α, β は荷重係数、 D_s は板剛度、 $[K]$ は板の差分の係数マトリックス、 E_0, ν_0 は弾性体の弾性係数とポアソン比、 $[K_f]$ と $[f_f]$ は弾性体の剛性マトリックスと撓性マトリックスである。

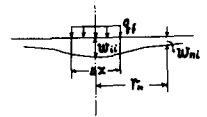


図-3. 地盤表面の変位

次に Standard Solid モデルにおける応力、ひずみの関係は $\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = (1 + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{E_2}{\epsilon}) \epsilon$ となる。(図-1)。本文では問題を簡単にするために $E_1 = E_2 = 1/A$, $\tau = 1/B$ とおくと、上式は

$\sigma(AD + B) = 2(2D + \frac{B}{A}) \epsilon P$ かつ $\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{2AD + B}{A^2 D + AB}$ (6) となる。更に粘弾性法則より、

$Q(p)/P(p) = 2G = \sigma/\epsilon = 2AD + B/A^2 D + AB$, $Q'(p)/P'(p) = 3K = C$ (7) となる。また、

$(1 - \nu_0^2)/E_0 = (3K + 4G)/2G(6K + 2G) = \{Q'(p)/P'(p) + 2Q(p)/P(p)\} / \{Q(p)/P(p) + 2Q'(p)/P'(p) + Q(p)/P(p)\}$

--- (7) と (2) 式から $w_f^* = \frac{\Delta x^2}{\pi} \cdot \frac{q_f(t)}{p} \cdot \{C + 2 \frac{2AD + B}{A^2 p + AB} \} / \{ \frac{2AD + B}{A^2 p + AB} \cdot \{ 2C + \frac{2AD + B}{A^2 p + AB} \} \cdot \frac{1}{r_n} \}$

が求まる。ここで $C = 0$ とし非正統性⁽³⁾と考へる。上式は次の通りである。

$w_f^* = \frac{\Delta x^2}{\pi} \frac{q_f(t)}{p} \cdot \frac{2(AD + B)}{(2p + A/B)} = \frac{\Delta x^2}{\pi} \cdot q_f(t) \cdot 2A \{ 1/p + A/2AD + B \}$ (8) 上記 A はせん断弾性係、 K は体弾性係数、 P, Q, P', Q' を微分演算子、 D は $(\partial/\partial t)$, A, B, C は粘弾性材料の係数とする。(8) 式を p を変数として、

Laplace 変換すれば、粘弾性体の場合の解をうる。 $w_f = \frac{\Delta x^2}{\pi} \cdot q_f(t) \cdot 2A \{ 1 - \frac{1}{2} \exp(-\frac{B}{2A} t) \} \cdot \frac{1}{r_n}$ (9)

本問題は $q_f(t)$ が time dependent であるために、 t 、 τ のみ積分を用いて次式のように変形する。

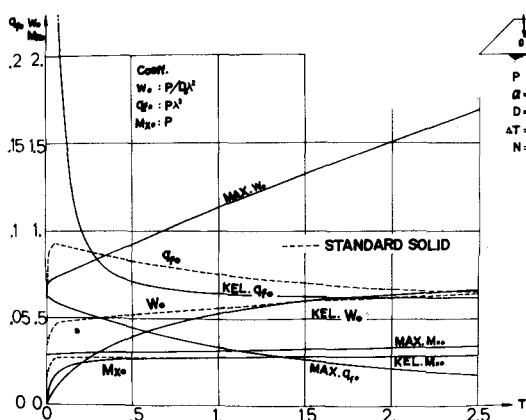
$w_f = \frac{2\Delta x^2 A}{\pi} \{ \frac{q_f(t)}{2} + \frac{B}{4A} \int_0^t q_f(\tau) \exp(-\frac{B}{4A} (t-\tau)) d\tau \} \cdot \frac{1}{r_n}$ (10) 数値計算を行なうために (10) 式を変形しマトリックス表示をする。上記 (3), (4) に相当する式を誘導すれば、 $\{w_f\} = \frac{2\Delta x A}{\pi} \{ \{q_f\} \cdot (\frac{1}{2} + \Delta t) + \frac{1}{4} \{F(t)\} \} \{f_f\}$

--- (11), $\{q_f\} = \frac{\pi}{2\Delta x A} \frac{2}{1 + 2\Delta t} [K_f] \{w_f\} - \frac{1}{2(1 + 2\Delta t)} \{F(t)\}$ (12)

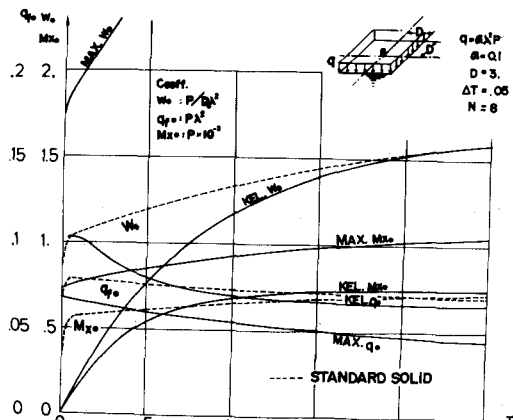
$([K] + \delta_0 \frac{2}{1 + 2\Delta t} [K_f]) \cdot \{w_f\} = \{\bar{q}\} + \frac{\Delta x^2}{2(1 + 2\Delta t)} \frac{D_f}{D_f} \{F(t)\}$ (12) となる。ここで $\lambda^3 = \pi/2 D_s A$, $\lambda \Delta x = \Delta$, $\delta_0 = \Delta^3$, $B \Delta t / A = \Delta T$ (時間きこみ幅), $F(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \exp(-(i-n) \frac{\Delta T}{2}) \cdot q_f(i \Delta T) \Delta T$ である。

初期条件は、本例の場合、 $E_1 = E_2$ とおいていいるので $\{w\}_{t=0} = \{w_f\}_{t=0} = \{w_0\}/2$, $\{q_f\}_{t=0} = \{q_{fe}\}$ である。添字 e は弾性体の場合を示す。以後、時間きこみ幅 ΔT 毎に逐次、時間経過と共に求めていく。

3) 計算結果と考察……既報と同様に、周辺自由で正方形板で、集中荷重中央載荷と全面等分布荷重載荷の場合に



(a) 集中荷重



(b) 等分布荷重

図-5. 板中央点下の諸量の時間経過による変化の状況

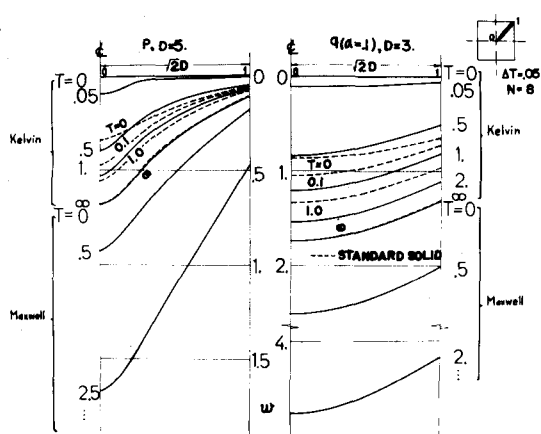
ついで解析した。図-5は板中央点のたわみ W_0 、接触反力 Q_0 、曲げモーメント M_{x0} と時間経過の関係を描いた。 $T=0$ では初期条件の通りで、 T が大きくなると Kelvin モデルの場合に一致する。いずれも初期に変化がみられる。図-6は対角線下のたわみと他のモデルの場合と併記した。これも前図と同様 $T=\infty$ で Kelvin モデルに一致し、他の場合のような大きな変化はみられない。(図-5.6 共に Standard solid エネルは破線で示した。) 図-7は (1) $T=0$ 、(2) $T=0.1$ 、(3) $T=\infty$ の場合について、板の対角線下の地盤応力の等応力線と半辺長の 1.5 倍の深さまで描いた。(1)と(3)は同じ応力状態である。 $T=0.1$ 附近で Kelvin モデルに似た性状を示し、以後は Kelvin エネルに近づく。即ち弾性体の場合になる。

以上のように、他のモデルに比して、時間経過に伴う大きな変化はみられなかった。たゞ初期の頃にはやや変化する。

本例のような場合問題になるのは時間きずみ幅 ΔT の選定である。今回は経験的に等間隔で $\Delta T=0.05$ とした。Maxwell モデルではある値以上では演算誤差の累積のため不合理な値を示した。本例では途中の精度は別として、そのような現象はみられなかった。本例の場合の初期の挙動をもう少し精確につかむため、きずみ幅を段階的に変える方法を検討中である。

【参考文献】

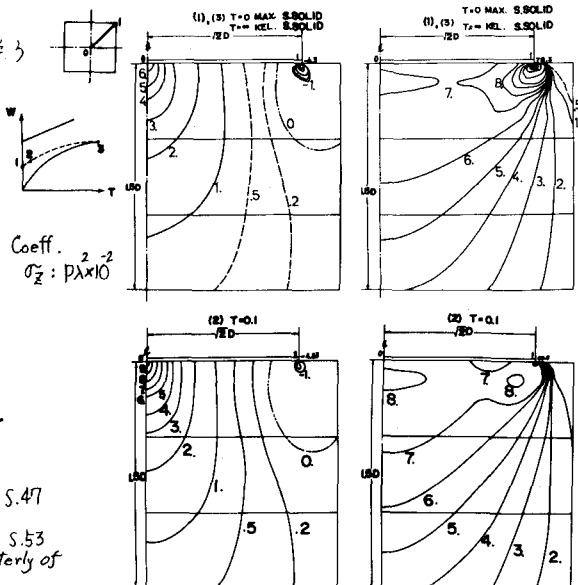
- ① 倉田, 高橋, 平野: 3次元弾性体上の平板の曲げについて, *27回 土木学会年次学術講演会 I-126, S.47
- ② 高橋, 倉田, 平野: 半無限粘弾性体上の板の曲げ解析, *33回 土木学会年次学術講演会 I-40, S.53
- ③ E.H. LEE: Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XIII, No. 2, 1955.
- ④ A.M. Freudenthal, H.G. Losh: The Infinite beam on a linear visco-elastic foundation, Proc. of ASCE, EM1, Jan, 1957.



(a) 集中荷重

(b) 等分布荷重

図-6. たわみの時間経過による変化。



(a) 集中荷重

(b) 等分布荷重

図-7. 地盤応力の時間的変化