

京都大学工学部 正 員 丹羽 義次

京都大学工学部 正 員 渡辺 英一

京都大学大学院 学生員 〇 勇 秀憲

1. まえがき

構造物の静的弾性不安定現象は、ポテンシャルエネルギー論によりその特異点に関して4つの基本的形態に分類される。つまり、飛移・屈服、非対称座屈、安定対称座屈、不安定対称座屈の4つである。¹⁾ 一般に実際の構造物ではこの4つが複雑に組み合わさり干渉し合っている。また、厳密には、避けることのできない初期不整(Imperfections)、たとえば初期たわみ、偏心あるいは残留応力等が存在し、不安定現象は「耐荷力」の問題として取扱われなければならない。

筆者らは、先に簡単な多自由度系モデルについて有限要素法および簡易に要素法によって定式化し、その安定性を論じた。^{2), 3)} ここでは、特に「横倒れ座屈を生ずるモデル」と「非対称補剛材を有する平板モデル」に関して、そのカタストロフィー特性を述べる。

2. カタストロフィー

微分位相幾何学におけるカタストロフィー理論⁴⁾によれば、一般にある系のポテンシャルエネルギー V は、コントロール空間 R^k と状態空間 R^n との直積空間 $R^k \times R^n$ から実数集合 R への写像としてとらえることができる。ここで、コントロール空間はコントロールパラメータ λ^j ($j=1, 2, \dots, k$)、状態空間は状態変数 Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) により把握される。また、この系の平衡空間 M_V は、コントロールパラメータを固定し、 V が Q_i に関して停留値をとるような R^{kn} の部分空間として定義される。

さて、 M_V から R^k への写像を「カタストロフィー写像」と呼ぶとき、 M_V 内の特異点で生ずるカタストロフィー特性は M_V の特異点のカタストロフィー写像によって示される。

コントロールパラメータが4個以下の場合、系のカタストロフィーは、折り目、くさび、つばめの尾、蝶、双曲的へそ、楕円のへそ、放物的へそ、の7個の「初等

カタストロフィー(Elementary Catastrophe)」に分類される。

一方、土木構造物においてコントロールパラメータ λ^j として、荷重パラメータおよび初期不整パラメータをとり、状態変数 Q_i として系の一般化座標をとる。このとき土木構造物の平衡空間における特異点の集合は、 V が Q_i に関して極値をとるような Critical Point の集合であり、そのカタストロフィー写像は系の耐荷力と初期不整パラメータとの関係を示すものとして、「初期不整の鋭敏性(Imperfection-Sensitivity)」と呼ばれている。たとえば、上記の非対称座屈の「 $1/2$ 乗法則」および安定対称座屈と不安定対称座屈の「 $2/3$ 乗法則」を示す特異点のカタストロフィー写像がよく知られている。⁵⁾

3. 解析手法

詳細は参考文献 2), 3) に述べられているので、ここでは解析手法の概略を記す。

離散化された系のポテンシャルエネルギー V は、面外変位 w_i 、面内・面外の荷重パラメータ λ_p, λ_b により記述される。そこで、 $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial w_i \partial w_j}$ を対角化するような Affine 変換 $w_i = \sum_j U_{ij} \bar{w}_j$ によって $\{w_i\}$ 空間から $\{\bar{w}_i\}$ 部分空間へ変換すれば、同時にポテンシャルエネルギー $V(w_i, \lambda_p, \lambda_b)$ も、 $D = D(\bar{w}_i, \lambda_p, \lambda_b)$ に変換される。このとき系の平衡空間 M_D は集合 $\{(\bar{w}_i, \lambda_p, \lambda_b) | D_i = \frac{\partial D}{\partial \bar{w}_i} = 0\}$ で表わされ、また M_D 内の特異点の集合は Critical Point の集合として、 $\{(\bar{w}_i, \lambda_p, \lambda_b) | D_{ii} = \frac{\partial^2 D}{\partial \bar{w}_i^2} = 0\}$ で記述される。

ところで、1. で述べた4つの基本的形態は Critical Point での分類であり、それぞれ各微係数 D_{iii} および D_{iiii} の Critical Point での値に対応して特徴づけられる。したがって、本研究では具体的に D_{iii} および D_{iiii} を定式化し、それを数値計算し、そしてカタストロフィー特性をとらえた。

4. 解析モデル

(1) 補剛座屈を生ずるモデル

Fig. 1 に示される2つのモデルを解析した。

Model-1 は、一端完全固定の梁の他端に横方向に荷重が作用した場合で、Model-2 は、両端完全固定の梁の中央点に横方向に荷重が作用した場合である。

例として、比 b/a を変化させてそのカタストロフィー特性を調べたのが Table 1 である。Table 中の記号 $D_{iiii}b^2/Eh$ は、前述のポテンシャルエネルギー D のモード i に関する4回の微係数を無次元化したものであり、各モード i の安定性を示している。ここで、この値が「負(negative)」になっていることは興味深い。つまり、こうしたモードは「不安定対称座屈」モードであり、「みぞくさび」のカタストロフィーである。

(2) 非対称補剛板を有する平板モデル

Fig. 2 に示すような片側に補剛板を有する平板のカタストロフィー特性を調べた。

定式化にあたり、補剛板の重心軸と板の重心面との差を「偏心」としてとらえることにより、筆者らの定式化^{23,24)}に面内と面外の連成項および面外変位の3次項を付加しなければならない。

解析においては補剛板と板とを合わせた全断面積を一定に保ったまま板厚 h を変化させてそのカタストロフィー特性を検討した。

解析によれば、この系は座屈モードは大別して全体座屈 Global Buckling モードと局所座屈 Local Buckling モードとがあり、それぞれここでは v_1, v_2 で示す。

$0.952 < h < 1.0$ の範囲では、全体座屈が局所座屈に先行し、 $D_{111} \neq 0$ であり、系のカタストロフィーは「非対称座屈」つまり「折り目」のカタストロフィーとなる。

$h = 0.951$ 近傍で全体座屈と局所座屈の同時座屈が起こり、系は「Anticlinical Point of Bifurcation」⁵⁾つまり「楕形的へそ」のカタストロフィーとなる。

また、 $h \leq 0.950$ の範囲では、局所座屈が全体座屈に先行し、 $D_{222} = 0, D_{2222} > 0$ だから、系は「安定対称座屈」つまり「くさび」のカタストロフィーとなる。

なお、詳細については当日 O.H.R. にて発表する予定である。本研究は昭和 53 年度文部省科学研究費の

Fig.1 Lateral Buckling Model

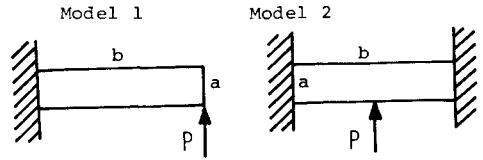
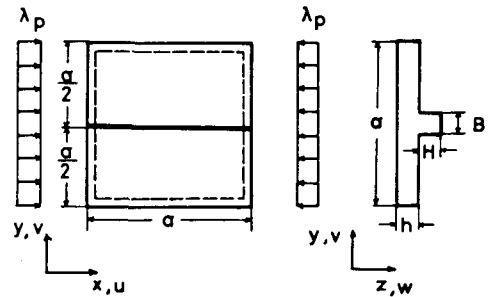


Table 1 Stability of Lateral Buckling

	h/a	D.O.F.		Mode i	
				1	2
Model 1	8	80	$\frac{P_{cr} b}{\pi^2 D}$ $\frac{D_{iiii} b^2}{E h}$	0.069	-0.079
				-17.579	-18.014
Model 1	4	40	$\frac{P_{cr} b}{\pi^2 D}$ $\frac{D_{iiii} b^2}{E h}$	-0.136	0.179
				-3.028	-0.231
Model 2	4	70	$\frac{P_{cr} b}{\pi^2 D}$ $\frac{D_{iiii} b^2}{E h}$	0.629	1.276
				14.270	-9.435

Fig.2 Stiffened Plate Model



援助を受けたことを付記する。

- 1) Thompson, J.M.T. and G.W. Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley and Sons, 1973.
- 2) 勇・田村・渡辺, 土木構造物のカタストロフィーに関する基礎的考察, 土木学会関西支部講演会, I-59, 1978.
- 3) 勇・田村・渡辺・中川, 構造物の耐荷力に関するカタストロフィー的考察, 応用力学連合会議論文抄録集, 515(A), 1978.
- 4) Thom, R., Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, Reading, 1972.
- 5) Thompson, J.M.T. and G.W. Hunt, Towards a Unified Bifurcation Theory, J. Appl. Math. Physics (ZAMP), Vol. 26, 1975.