I-24　　数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案

電力中央研究所　正員　中村秀治

1. まえがき

計算機を用いた構造解析の大勢が変位法である現在もなお、マトリックスのかけ算による移行計算を主体とした伝達マトリックス法は、興味深い構造解析法の一つとして重要な地位を占めている。伝達マトリックス法は、構造要素の常微分方程式の一般解を基礎にしており、理論体系の明確さと計算法の容易さ、大容量の計算機の不必要性など優れた特性を有している。しかし、一方，伝達計算過程でのけた落ちとそれにともなう精度の著しい低下という問題のつきまとうことも周知の事実である[1]。そのため，2倍長計算，スケーリング(基準化)などが行われるが，多層ラーメン，格子げた，板，シェルなどの場合に、精度低下は本質的に不可避と思われる現象に直面することが多い。

そこで，本報告では，伝達マトリックス法の精度改善という立場から従来の方法に検討を加え，一つの新しい方法を提案する。その概要は従来の方法に逐次消去(あるいは逐次代入)計算を組み合わせたものと同等であり，従来の方法が格点物理量を逐次伝達するのに対し、本方法では各格点物理量の間の関係式を伝達する形になる。

2. 提案する一種の伝達マトリックス法

各格点で物理量は偶数個($2n$個)存在するので，それらを適当に半分ずつ2組に分け，n元のベクトルy, zで表わす。分け方は全く任意であり，定められた方法は無い。次に，$(n\times n)$のマトリックスをα, β, n元のベクトルをγとすれば，各格点の物理量yとzの間に次式が成立する。

$$\vec{\alpha}y+\vec{\beta}z=\vec{\gamma},\quad \overleftarrow{\alpha}y+\overleftarrow{\beta}z=\overleftarrow{\gamma} \qquad \text{(1)}$$

本方法ではこの関係式，つまり$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\overleftarrow{\alpha}$, $\overleftarrow{\beta}$, $\overleftarrow{\gamma}$を始点から終点まで伝達して求めることになる。矢印→は左から右への伝達を意味しており，←は逆方向への伝達計算を意味する。$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\overleftarrow{\alpha}$, $\overleftarrow{\beta}$, $\overleftarrow{\gamma}$は伝達計算始点の境界条件，yおよびzの物理量の組み合わせにより異なり，$(n\times n)$マトリックスとn元ベクトルであること以外何も言えない。各格点の全物理量は両方向からの伝達計算で求められた$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\overleftarrow{\alpha}$, $\overleftarrow{\beta}$, $\overleftarrow{\gamma}$を用いて逆行列計算で求められる。

伝達計算過程では，当然α, β, γの成分の絶対値が増大するので，適切な判定基準に従い，途中で式(1)の両辺に$\vec{\alpha}^{-1}$, $\overleftarrow{\alpha}^{-1}$あるいは$\vec{\beta}^{-1}$, $\overleftarrow{\beta}^{-1}$をかけて新たに$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, $\overleftarrow{\alpha}$, $\overleftarrow{\beta}$, $\overleftarrow{\gamma}$と置きなおし，α, β, γのノルムを下げることが必要である。

2-1 格間伝達法

$\mathbb{Y}$を未知の物理量ベクトル($2n$)，$\mathbb{A}$を係数マトリックス($2n\times 2n$)，$\mathbb{Q}$を荷重ベクトル($2n$)とした時，構造要素の常微分方程式

$$\frac{d\mathbb{Y}}{dx}=\mathbb{A}\mathbb{Y}+\mathbb{Q}(x) \qquad \text{(2)}$$

の初期値問題の一般解

$$\mathbb{Y}(x)=e^{\mathbb{A}x}\mathbb{Y}(0)+e^{\mathbb{A}x}\int_0^x e^{-\mathbb{A}s}\mathbb{Q}(s)\,ds \qquad \text{(3)}$$

の漸化式表示は

$$\mathbb{Y}(x+\Delta x)=e^{\mathbb{A}\Delta x}\mathbb{Y}(x)+e^{\mathbb{A}\Delta x}\int_0^{\Delta x} e^{-\mathbb{A}s}\mathbb{Q}(x+s)\,ds \qquad \text{(4)}$$

である[2]。そこで，

$$\mathbb{Y}=\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{(5)} \qquad e^{\mathbb{A}\Delta x}=\begin{bmatrix} A(\Delta x) & B(\Delta x) \\ C(\Delta x) & D(\Delta x) \end{bmatrix} \quad \text{(6)} \qquad \int_0^{\Delta x} e^{-\mathbb{A}s}\mathbb{Q}(x+s)\,ds=\begin{Bmatrix} g(x) \\ r(x) \end{Bmatrix} \quad \text{(7)}$$

と置きなおす。ここで，y, zはn次元の未知物理量ベクトル，$A(\Delta x)$, $B(\Delta x)$, $C(\Delta x)$, $D(\Delta x)$は$(n\times n)$のマトリックス，$g(x)$, $r(x)$はn次元のベクトルとする。

式(5), (6), (7)を式(4)へ代入し，両辺に$e^{-\mathbb{A}\Delta x}$をかければ，

$$\begin{bmatrix} A(-\Delta x) & B(-\Delta x) \\ C(-\Delta x) & D(-\Delta x) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y(x+\Delta x) \\ z(x+\Delta x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} y(x) \\ z(x) \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} g(x) \\ r(x) \end{Bmatrix} \qquad \text{(8)}$$

式(8)の両辺に$[\vec{\alpha}(x)\ \ \vec{\beta}(x)]$をかけて整理すれば

$$[\vec{\alpha}(x)A(-\Delta x)+\vec{\beta}(x)C(-\Delta x)]\boldsymbol{y}(x+\Delta x)+[\vec{\alpha}(x)B(-\Delta x)+\vec{\beta}(x)D(-\Delta x)]\boldsymbol{z}(x+\Delta x)=\vec{\gamma}(x)+\vec{\alpha}(x)\boldsymbol{q}(x)+\vec{\beta}(x)\boldsymbol{r}(x) \quad \text{--------}(9)$$

すなわち．式(9)より$\vec{\alpha}(x), \vec{\beta}(x), \vec{\gamma}(x)$と$\vec{\alpha}(x+\Delta x), \vec{\beta}(x+\Delta x), \vec{\gamma}(x+\Delta x)$の間に次式の成立することがわかる。

$$[\vec{\alpha}(x+\Delta x)\ \ \vec{\beta}(x+\Delta x)]=[\vec{\alpha}(x)\ \ \vec{\beta}(x)]e^{-A\Delta x} \quad \text{---------}(10) \qquad \vec{\gamma}(x+\Delta x)=\vec{\gamma}(x)+[\vec{\alpha}(x)\ \ \vec{\beta}(x)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}(x)\\ \boldsymbol{r}(x)\end{Bmatrix} \quad \text{---------}(11)$$

逆方向からの伝達計算の場合も同様に，$\overleftarrow{\alpha}(x-\Delta x), \overleftarrow{\beta}(x-\Delta x), \overleftarrow{\gamma}(x-\Delta x)$と$\overleftarrow{\alpha}(x), \overleftarrow{\beta}(x), \overleftarrow{\gamma}(x)$の間には次式が成立する。

$$[\overleftarrow{\alpha}(x-\Delta x)\ \ \overleftarrow{\beta}(x-\Delta x)]=[\overleftarrow{\alpha}(x)\ \ \overleftarrow{\beta}(x)]e^{A\Delta x} \quad \text{--------}(12) \qquad \overleftarrow{\gamma}(x-\Delta x)=\overleftarrow{\gamma}(x)+[\overleftarrow{\alpha}(x)\ \ \overleftarrow{\beta}(x)]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{s}(x)\\ \boldsymbol{t}(x)\end{Bmatrix} \quad \text{------------}(13)$$

ここで，

$$-\int_0^{\Delta x} e^{As} Q(x-s)\,ds=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{s}(x)\\ \boldsymbol{t}(x)\end{Bmatrix} \quad \text{（ただし．}\Delta x\text{は常に正の値をとるものとする）} \quad \text{------------}(14)$$

以上の式(7),(10)～(14)が格間伝達に用いる関係式である。

2−2 格点伝達法

格点物理量$\boldsymbol{Y}$の$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$への分割が，従来の格点伝達マトリックスに若干の記述上の修正を生じさせるが，本質的な相違は無い。

2−3 境界条件の与え方

始点におけるα, β, γにより境界条件は与えられる。特定の決め方は無いが，例えば始点で境界条件が，$\boldsymbol{y}=0$，$\boldsymbol{z}=$未知　であれば，$\mathbb{I}$を単位マトリックス$(n\times n)$として，$\alpha=\mathbb{I}$，$\beta=0$，$\gamma=0$とすればよい。$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$の一部が0で，一部が未知の場合でも，$\alpha, \beta, \gamma$により境界条件が適切に表わされていればよい。

2−4 伝達計算過程でα, β, γ成分の絶対値を下げる方法

伝達計算過程でα, β, γの絶対値，すなわちノルムが増大すれば，桁落ちによる誤差が発生しやすくなる。そこで，α, βのノルムを調べつつ伝達計算を行い，ノルムがある基準値を越えた時，それを下げることを考える。方法は一通りではないが，最も簡単でかつ根拠の明確なのは，式(1)の両辺に$\vec{\alpha}^{-1}, \overleftarrow{\alpha}^{-1}$あるいは$\vec{\beta}^{-1}, \overleftarrow{\beta}^{-1}$をかけて，

$$\mathbb{I}\boldsymbol{y}+\vec{\alpha}^{-1}\vec{\beta}\boldsymbol{z}=\vec{\alpha}^{-1}\vec{\gamma}\ ,\quad \mathbb{I}\boldsymbol{y}+\overleftarrow{\alpha}^{-1}\overleftarrow{\beta}\boldsymbol{z}=\overleftarrow{\alpha}^{-1}\overleftarrow{\gamma} \quad \text{（}\mathbb{I}\text{は単位マトリックス）} \quad \text{------------}(15)$$

あるいは，

$$\vec{\beta}^{-1}\vec{\alpha}\boldsymbol{y}+\mathbb{I}\boldsymbol{z}=\vec{\beta}^{-1}\vec{\gamma}\ ,\quad \overleftarrow{\beta}^{-1}\overleftarrow{\alpha}\boldsymbol{y}+\mathbb{I}\boldsymbol{z}=\overleftarrow{\beta}^{-1}\overleftarrow{\gamma} \quad \text{------------}(16)$$

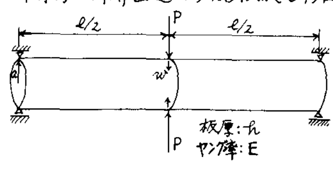
とし，$\mathbb{I}, \vec{\alpha}^{-1}\vec{\beta}, \vec{\alpha}^{-1}\vec{\gamma}$, ------を新たに$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, ------と置きなおすことである。

本方法の重要事項の一つはこの置きなおしであり，α, β, γのノルムが低下し，有利に計算を進められる根拠も存在する。[3]

2−5 格点での全物理量を求める方法

両方向から伝達計算すれば，格点iにおいて次式が求められる。

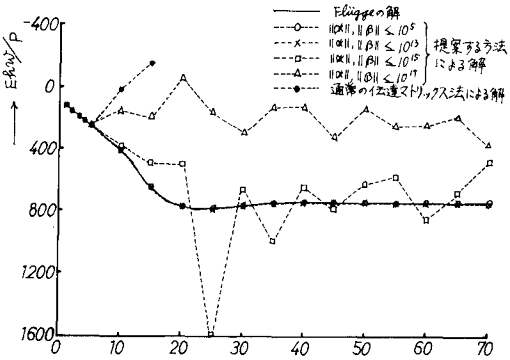
$$\begin{bmatrix}\vec{\alpha}_i & \vec{\beta}_i\\ \overleftarrow{\alpha}_i & \overleftarrow{\beta}_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{y}_i\\ \boldsymbol{z}_i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\vec{\gamma}_i\\ \overleftarrow{\gamma}_i\end{Bmatrix} \quad \text{----------------------------}(17)$$



これを逆行列計算で解くことにより，全物理量が求められる。

3. 数値計算例

右図上の計算モデルについて数値計算し，Flüggeの2重フーリエ級数解，通常の伝達マトリックス法による解と比較した。右図下はスパン長ℓと載荷点の半径方向変位wの関係を無次元化して示したものである。通常の方法では，ℓ/aが10以上では誤差が大きくなり，20以上になると計算することも自体が不可能になるのに対し，提案する方法ではユークリッドノルムの限界値を10^{13}以下に設定することにより，良い解の得られることがわかる。



参考文献

1) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法，コンピューターによる構造工学講座Ⅱ-2-B，培風館，1970

2) 中村秀治：管路，薄肉はりなどの線形常微分方程式の一数値解析法，土木学会論文報告集No.271，1978，3

3) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案，土木学会論文報告集No.289，1979，9