

北海道大学 正 員 三 上 隆
北海道大学 正 員 茅 村 仁

1. はじめに 直交選点法は、重みつき残差法の主要解法の1つであり、最近、いろいろな工学分野に応用され注目されている。直交選点法では、試行関数として、ルジャンドルの多項式のような直交関数系を用いることが多い。m次までの多項式を含む関数系の場合は、m+1次の多項式のゼロ点で、残差が0となる。このような手法は、文献1に詳細に論じられている。また、上記関数系を用いて直交選点法による振動解析を試みた研究もある²⁾。本報告は、直交選点法を、はりおよび板の固有値問題に適用を試みたものであり、このとき解が試行関数の係数を含んだ形でなく、選点における関数値の和として与えることにより問題の簡単化を計り、併せて内部選点法の解析結果に及ぼす影響を検討したものである。

2. 解析方法 つぎのような線形固有値問題を考える。

$$LW + \lambda MW = 0 \quad \text{----- (1)}$$

境界上で $B_k W = 0, k=1 \sim 4$ ----- (2)
 ここで、L, M, B_k は微分演算子で、Lは4階とし、 $MW=W$, $B_k W=W$ も含むとする。また λ は固有値。

試行関数は、次の式を用いる。

$$w(x) = \sum_{i=1}^{N+4} d_i x^{i-1} \quad \text{----- (3)}$$

ここで、Nは内部選点数である。

内部選点は区間[0, 1]で直交する $P_N^*(x)$ の根を用いる。多項式 $P_N^*(x)$ はルジャンドル多項式 $P_N(x)$ の区間[-1, 1]を[0, 1]に変換したもので、 $P_N^*(x) = P_N(1-2x)$ の関係がある³⁾。

式(3)で、選点の値を計算すると

$$w(x_j) = \sum_{i=1}^{N+4} x_j^{i-1} d_i, j=1 \sim N+2 \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 $x_1=0, x_{N+2}=1$ は内部選点、 $x_{N+1}=1/2$ である。

式(4)をマトリックス表示すると、

$$\{W\} = [Q_1] \{\bar{d}\} + [Q_2] \{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (5)}$$

ここで、 $\{W\}^T = \{w(x_1), w(x_2) \dots w(x_{N+1}), w(x_{N+2})\}$
 $\{\bar{d}\}^T = \{d_1, d_2 \dots d_{N+2}\}$, $\{\bar{d}_2\}^T = \{d_{N+3}, d_{N+4}\}$ であり、 Q_1 は $(N+2) \times (N+2)$, Q_2 は $(N+2) \times 2$ の大きさである。式(5)を $\{\bar{d}\}$ につき解き、式(4)の1~4次微分に代入すると、

$$\{W'\} = [A_1] \{W\} + [A_2] \{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (6)}$$

$$\{W''\} = [B_1] \{W\} + [B_2] \{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (7)}$$

$$\{W'''\} = [C_1] \{W\} + [C_2] \{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (8)}$$

$$\{W''''\} = [D_1] \{W\} + [D_2] \{\bar{d}_2\} \quad \text{----- (9)}$$

ここで、 $A_1 \sim D_1$ は $(N+2) \times (N+2)$, $A_2 \sim D_2$ は $(N+2) \times 2$ の大きさのマトリックスであり、また $\{W\}$ は

$\{W'\}^T = \{w'(x_1), w'(x_2) \dots w'(x_{N+2})\}$ であり、他も同様である。

N+4個の条件は次のように決定される。まず、N個の条件はN個の選点での残差を求めることにより定められる。式(1)と式(6)~(9)より

$$[\alpha_1] \{\bar{W}_1\} + [\alpha_2] \{\bar{W}_2\} + \lambda [\alpha_3] \{\bar{W}_3\} = 0 \quad \text{--- (10)}$$

ここで、 $\{\bar{W}_1\}^T = \{w(x_2), w(x_3) \dots w(x_{N+1})\}$,

$\{\bar{W}_2\}^T = \{w(x_1), w(x_{N+2}), d_{N+3}, d_{N+4}\}$ であり、

α_1, α_3 は $N \times N$ の大きさ、 α_2 は $N \times 4$ の大きさである。残りの4個の条件は $x_1=0$ と $x_{N+2}=1$ での境界条件より定められる。式(2)と式(6)~(9)より

$$[\beta_1] \{\bar{W}_1\} + [\beta_2] \{\bar{W}_2\} = 0 \quad \text{----- (11)}$$

最終的に、式(10)及び(11)より

$$[\alpha] + \lambda [\alpha_3] \{\bar{W}_1\} = 0 \quad \text{----- (12)}$$

の形の固有値問題となる。ここで、 α は $N \times N$ の大きさである。特に $MW=W$ のときは、 α_3 は単位マトリックスとなり、標準的な固有値問題となる。

3. 数値計算例

3.1) はりの曲げ振動 曲げ剛性EI, 断面積A, 部材長さlの一樣なはりの自由振動解析をする。変数を無次元化し、式(1)の形に、あてはめると、 $L = \frac{d^4}{dx^4}$, $MW=W$, $\lambda = -\frac{\delta A l^4}{g EI} \omega^2$ となる。ここで、 γ : 単位体積当りの重量, g : 重力加速度, ω : 固有円振動数である。

図-1は、横軸に内部選点数N, 縦軸に固有値 λ をとり、種々の境界条件に対して解の収束状態を表わしたものである。図から明らかのように、内部選点数Nが4ないし以上になると厳密解と良好な一致をみるこがでさ

る。図中()内の数字は振動波長の次数を示す。又、固有振動波長の計算結果を厳密解と比較したが良い結果が得られた。

3.2) 変断面片持ばりの曲げ振動 断面は次モーメント $I(x)$ 、断面積 $A(x)$ を変数を無次元化して、次式で表わす。 $I(x)=I_c K(x)$ 、 $A(x)=A_c U(x)$ 、ただし $K(x)=(1-x)^m$ 、 $U(x)=(1-x)^n$ とする。正解が $m=n=0, 1/4, 3/4, 1$ について得られているので、これについて比較をしてみる。このとき、式(1)で、 $Mw=w$ 、 $\lambda=-\frac{\delta A_c I_c^2}{9 E I_c} \omega^2$ 、 $L=\frac{d^4}{dx^4}-2m(1-x)\frac{d^3}{dx^3}+m(m-1)(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2}$ である。図-1は、 N の変化による、 λ の収束状況を示したもので、 m, n の値によらず、正解()内の数字と良く一致している。

3.3) 矩形板の座屈解析 圧縮方向に垂直な2辺が単純支持され残りの2辺が任意境界条件を有する矩形板 $(a \times b)$ が一様な圧縮力 (N_x) を受けるときの座屈解析を試みる。板は m 個の正弦関数の半波形で座屈すると仮定し、変数を無次元化すると、(1)式において、 $L=\frac{d^4}{dx^4}-2(\frac{b}{a} m \pi)^2 \frac{d^2}{dx^2}+(\frac{b}{a} m \pi)^4$ 、 $\lambda=-R(\frac{b}{a} m \pi)^2$ 、 $Mw=w$ となる。ここで、 R は座屈係数である。アスペクト比を1、ポアソン比0.25で解析すると図-3となる。図は種々の境界条件について、内部選点数 N を変化させ、座屈係数 λ の収束状況を示したもので、いずれの境界条件においても、その収束値は既知の値と比較し、精度の良いことが推察される。

4. 結論 本報告は直交選点法による固有値解析を試みたものであり、式(6)~(9)のマトリクス $A_1 \sim B_1$ 、 $A_2 \sim B_2$ を作成することにより、基礎方程式(1)、境界条件式(2)が与えられれば、比較的容易に又、高精度の解析が可能なものと思われる。又、計算例3.2)にも見られるように断面形状が変化する場合などにも適した解法の1つと思われる。

参考文献 1) B.A. Finlayson著、藤田昌夫訳、山崎久二、川井忠彦共訳、'弾性力学法と変分原理'、培風館、S49年
2) 水上隆男、西岡隆、'Legendreの多項式を用いた折板構造の振動解析'、地球学会論文報告集、第297号、1978年9月
3) 森口繁一、宇田川鍾久、松信著、'数学公式III'、岩波、1975年
4) 茂田昌夫著、'構造力学要論'、丸善、S49年
5) 土木学会編、'構造力学公式集'、S49年

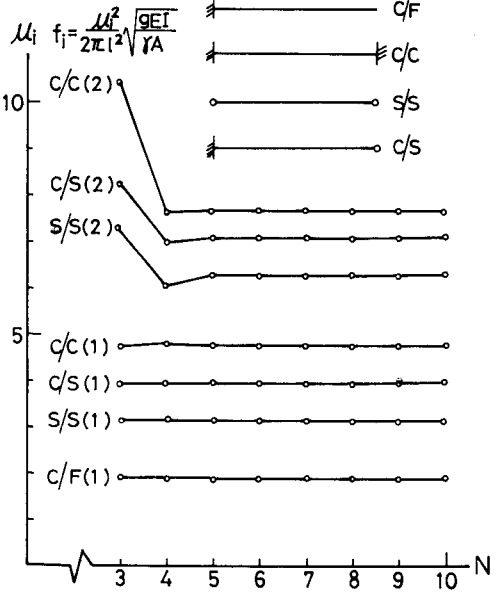


図-1 内部選点数による λ の収束状況

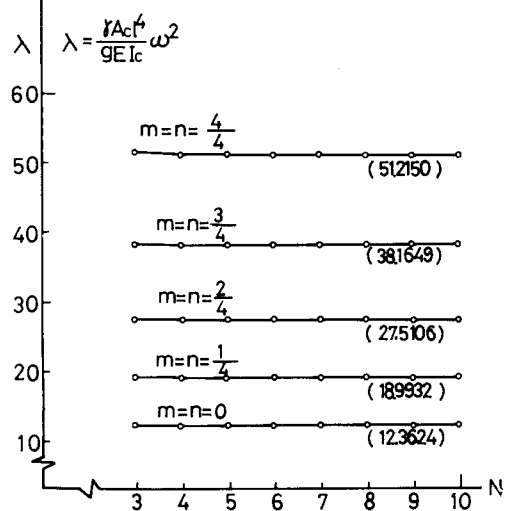


図-2 内部選点数による λ の収束状況(変断面片持)

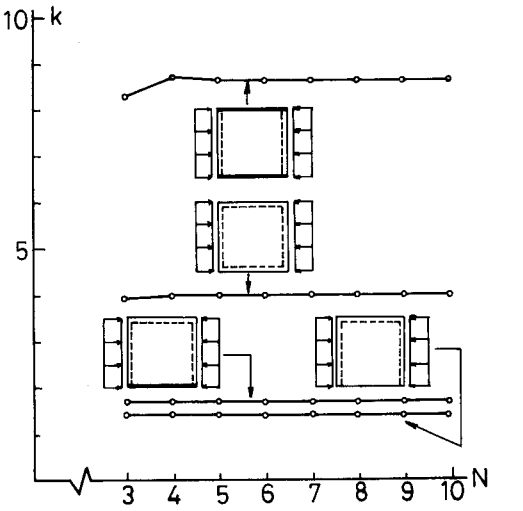


図-3 内部選点数による λ の収束状況