I-19　Newmarkのβ法における位相遅れ補正の一方法（続報）

熊本大学　正員　平井一男
八代高専　正員　○水田洋司

1. まえがき

前報[1]で誘導された計算手法は、Newmarkのβ法[2]（$\beta=1/4$）の時間間隔hに係数を乗じて応答を求める形になっているが、係数決定時に、Newmarkのβ法（$\beta=1/4$）と比較するという理由で$a=b$の条件を用いている。本報では、特定の条件を用いることなく係数を決定できることについて述べており、導かれた漸化式は前報で誘導された式と一致する。

2. 解析法

多質点系の運動方程式は次式で表わされる。

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{W}}+\mathbb{C}\dot{\mathbb{W}}+\mathbb{K}\mathbb{W}=\mathbb{F}(t) \qquad (1)$$

ここに、$\mathbb{M}$は質量マトリックス、$\mathbb{C}$は減衰マトリックス、$\mathbb{K}$は剛性マトリックス、$\ddot{\mathbb{W}}$は加速度ベクトル、$\dot{\mathbb{W}}$は速度ベクトル、$\mathbb{W}$は変位ベクトル、$\mathbb{F}(t)$は外力ベクトルを表わす。いま、(1)式を逐次積分法により解くことを考え、$(n-1)$時間点での応答は既知とする。n時間点の速度と変位が$(n-1)$時間点での応答を用いて次式で表わされるものと仮定する。

$$\dot{\mathbb{W}}_n=\dot{\mathbb{W}}_{n-1}+h(a\ddot{\mathbb{W}}_{n-1}+b\ddot{\mathbb{W}}_n) \qquad (2)$$

$$\mathbb{W}_n=\mathbb{W}_{n-1}+eh\dot{\mathbb{W}}_{n-1}+h^2(c\ddot{\mathbb{W}}_{n-1}+d\ddot{\mathbb{W}}_n) \qquad (3)$$

ここに、hは時間間隔であり、a～eの係数は各量のn時間点の応答への寄与量を表わす。(1)～(3)式の連立方程式を解く方法として、反復法と直接法があるが、本報では後者を用いている。また、非減衰多自由度系の運動方程式は、モード解析を行うことにより、1自由度系の運動方程式に置換することができる。それ故、本報では1質点非減衰自由振動の場合について、解の安定性、位相遅れと係数の関係を論じている。式の誘導、展開については、文献(2)を参考にしている。

図-1に示す1質点モデルの運動方程式は

$$\ddot{w}+\omega^2 w=0 \qquad (4)$$

と表わせる。ここに、$\omega=\sqrt{k/m}$、kはバネ定数、mは質量、$\ddot{w}$は加速度、wは変位を表わす。(2)～(4)式より、次式のような差分方程式を誘導することができる。

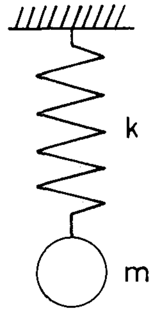

図-1. 1質点モデル

$$w_{n+1}-(2-\alpha^2)w_n+w_{n-1}-\frac{\omega^2h^2(ae-c-d)}{1+d\omega^2h^2}(w_n-w_{n-1})=0 \qquad (5)$$

$$\alpha^2=\frac{e(a+b)\omega^2h^2}{1+d\omega^2h^2} \qquad (6)$$

(5)式の第4項は速度項を表わしており、減衰の存在を意味する。(4)式は減衰項を含まないから、(5)式の第4項の係数は零でなければならない。

$$ae=c+d \qquad (7)$$

従って、(5)式は次式のように表わされる。

$$w_{n+1}-(2-\alpha^2)w_n+w_{n-1}=0 \qquad (8)$$

(8)式は、$\alpha^2<4$のとき安定な解をもつから

$$\frac{e(a+b)\omega^2h^2}{1+d\omega^2h^2}<4 \qquad (9)$$

となる。(9)式に周期$T(=2\pi/\omega)$を代入し、h/Tについて整理すると、次式のようになる。

$$\frac{h}{T}<\frac{1}{\pi\sqrt{e(a+b)-4d}} \qquad (10)$$

ここで、h/Tの大きさに無関係に(10)式が成立するためには、係数が次式を満足すればよい。

$$d=\frac{e(a+b)}{4} \qquad (11)$$

差分方程式(8)式の解は、$\alpha^2<4$のとき

$$\alpha=2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (12)$$

と置くと、次式のように求められる。

$$w=A\cos(\varphi t/h)+B\sin(\varphi t/h) \qquad (13)$$

ここに、A，Bはそれぞれ変位、速度の意味をもつ定数である。また、(4)式の正解は

$$w = w_0 \cos\omega t + \left(\frac{\dot{w}_0}{\omega}\right)\sin\omega t \qquad (14)$$

と表わされ、w_0, $\dot{w}_0$はそれぞれ初期変位、初期速度である。(13)、(14)式の比較により、係数間の関係を導いていく。まず、初期変位に対する振幅の比較を行う。

$t=0$で$\dot{w}_0=0$の時、(13)、(14)式はそれぞれ次のように表わされる。

$$w = A\cos(\varphi t/h) \qquad (15)$$

$$w = w_0 \cos\omega t \qquad (16)$$

(3)式で、$n=1$、$\dot{w}_0=0$、$\theta=\omega h$とおき、(4)式の関係を用いると、w_0, w_1の関係は

$$w_0 = \frac{1+d\theta^2}{1-c\theta^2}w_1 \qquad (17)$$

となる。(15)、(17)式より、定数Aを求め、(12)式の関係を用いて整理すると次式のように表わせる。

$$A = \frac{(1-c\theta^2)w_0}{(1+d\theta^2)(1-\frac{\alpha^2}{2})} \qquad (18)$$

(6)式を(18)式に代入し、同一の初期変位に対する差分解と正解の振幅比を求めると次式のようになる。

$$\frac{A}{w_0} = \frac{1-c\theta^2}{1+d\theta^2-\frac{e(a+b)}{2}\theta^2} \qquad (19)$$

振幅誤差を零とするためには、(19)式で$A/w_0=1$となるように係数間の関係を定めてやればよい。

$$c+d = \frac{e(a+b)}{2} \qquad (20)$$

次に初期速度に対する振幅誤差は、$t=0$のとき$w_0=0$という初期条件を用い、初期変位に対する振幅誤差の場合と同様にして求めることができる。これによって導かれた係数間の関係式は、次式のように表わされる。

$$e = a+b \qquad (21)$$

差分方程式の解の周期をT_s、正解の周期をTとすると、

$$\frac{T_s}{T} = \frac{2\pi h/\varphi}{2\pi/\omega} = \frac{\theta}{\varphi} \qquad (22)$$

(6)、(12)、(21)式より

$$\varphi = 2\sin^{-1}\left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+d\theta^2}}\right) \qquad (23)$$

となる。(22)、(23)式より

$$\frac{T_s}{T} = \theta\left\{2\sin^{-1}\left(\frac{e\theta}{2\sqrt{1+d\theta^2}}\right)\right\}^{-1} \qquad (24)$$

周期誤差を零とするためには、(24)式で$T_s/T=1$となるように、係数を定めてやればよい。すなわち、

$$e = \left\{\frac{\pi h}{T}\sqrt{\left(\sin^2\pi\frac{h}{T}\right)^{-1}-1}\right\}^{-1} \qquad (25)$$

以上の事より、係数に対する条件を整理すると下記のようになる。

(i)実際には存在しない減衰を消去するための条件

$$ae = c+d \qquad (26)$$

(ii)安定限界を無限大とするための条件

$$d = e(a+b)/4 \qquad (27)$$

(iii)初期変位に対する応答振幅誤差を零にする条件

$$c+d = e(a+b)/2 \qquad (28)$$

(iv)初期速度に対する応答振幅誤差を零にする条件

$$e = a+b \qquad (29)$$

(v)時間間隔hに対し、位相遅れを零にする条件

$$e = \left\{\frac{\pi h}{T}\sqrt{\left(\sin^2\pi\frac{h}{T}\right)^{-1}-1}\right\}^{-1} \qquad (30)$$

これより、各係数は次のようになる。

$$a = b = e/2 \qquad (31)$$

$$c = d = (e/2)^2 \qquad (32)$$

(31)、(32)式に示すように、a～eの各係数はhの値が定まれば、決定できる。(31)、(32)式を(2)、(3)式に代入して整理すると次式のように表わされる。

$$\dot{W}_n = \dot{W}_{n-1} + \frac{eh}{2}(\ddot{W}_{n-1}+\ddot{W}_n) \qquad (33)$$

$$W_n = W_{n-1} + eh\dot{W}_{n-1} + \frac{(eh)^2}{4}(\ddot{W}_{n-1}+\ddot{W}_n) \qquad (34)$$

3. おわりに

前報では、Newmarkのβ法($\beta=1/4$)と比較するために$a=b$としたが、本報では、位相遅れのない安定な応答を得るためには$a=b$でなければならないことを示した。$a \neq b$という値を用いて数値計算を行うと、振幅誤差、位相遅れ等が出てくる。

（参考文献）

(1) 水田・西山・平井：Newmarkのβ法における位相遅れ補正の一方法、土論、第268号、pp.15～21、1977年12月

(2) Newmark N.M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. of ASCE, Vol.EM3, pp.67～74, 1959年