

(株)酒井鉄工所 正員 石崎 茂
 大阪大学工学部 正員 前田 幸雄

1. まえがき 近年 我国において多数のサイロが建設されているが、その解析手法や構造挙動に関する研究は非常に少ないように思われる。一般にサイロに作用する荷重としては、内容物による粒状体圧に加えて、風荷重及び地震荷重が考えられる。粒状体圧は通常軸対称荷重であり¹⁾サイロ本体には主として膜力を発生させる。しかし、風荷重や地震荷重は、その非対称性によりシェルに曲げ応力を発生させる。非対称荷重を受けるサイロの解析例としては、BoresiとJerath²⁾による区分多項式近似によるものがあるが、境界部に導入しているバネ定数が不明確であり厳密さに欠けるようである。そこで筆者らは有限要素法を用いて非対称荷重を受けるサイロを解析することを試みた。以下にその微小変位理論による定式化を示すとともに例題の解析結果について考察する。

2. 有限要素法による非対称荷重を受ける軸対称シェルの定式化

図-1に示すような筒体極座標系によってシェル要素を表わせば、中央面の各点に作用する合応力 $\sigma = \{N_\theta, N_\phi, M_\theta, M_\phi, M_{\theta\phi}\}$ は、シェル中央面の対応する伸び $\epsilon_M = \{\epsilon_\theta, \epsilon_\phi, \epsilon_{\theta\phi}\}$ と曲率 $\epsilon_B = \{K_\theta, K_\phi, K_{\theta\phi}\}$ によって一義的に表わすことができる。即ち

$$\sigma = \begin{Bmatrix} DN \\ 0 \\ DB \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_M \\ 0 \\ \epsilon_B \end{Bmatrix} = DE \quad (1)$$

ここで DN, DB はそれぞれ伸び及び曲げに対する弾性マトリックスである。

また、Novozhilov³⁾は非対称荷重を受ける軸対称シェルの局所系における変位 $\bar{\delta} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ とひずみの関係を次式で与えている。(図-1, 図-2参照)

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{\theta\phi} \\ K_\theta \\ K_\phi \\ K_{\theta\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\ -\frac{\cos\phi}{R} & \frac{\partial}{R\partial\theta} & \frac{\sin\phi}{R} \\ \frac{\partial}{R\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\cos\phi}{R} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ 0 & \frac{\sin\phi}{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} & -\frac{\partial^2}{R\partial\theta^2} - \frac{\cos\phi}{R} \frac{\partial}{\partial s} \\ 0 & \frac{\sin\phi}{R} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\sin\phi}{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} & -\frac{\partial^2}{R\partial s\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{R^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \alpha \bar{\delta} \quad (2)$$

こうしてシェル中央面の変位が定められ、それに伴うひずみ及び合応力は、

図-2 シェル要素

(1)(2)式より決定できる。次に図-2のような両端の節点円 i, j からなるリング状のセグメントを考え、全体座標系における変位 $\delta = \{u, v, w\}$ をフーリエ級数に展開すれば、

$$u = u_0 + \sum u_n \cos n\theta, \quad v = v_0 + \sum v_n \sin n\theta, \quad w = w_0 + \sum w_n \cos n\theta \quad \dots (3)$$

微小変位の弾性問題では展開の各成分間に連成はないので、非対称荷重を受ける場合にも通常^{とこの場合}の軸対称問題と同様に一次元問題に還元できる。そこで形状関数に3次のエルミット多項式を導入し節点パラメータ^{とこの場合}に関する値を δ^e とすれば要素内任意点の全体系における変位 δ は形状関数 N と節点変位ベクトル δ^e によって次のように表わすことができる。即ち、 $\delta = N\delta^e \dots (4)$ 、また局所系における変位 $\bar{\delta}$ は、変換マトリックス π によって全体系における変位 δ を用いて表わすことができ $\bar{\delta} = \pi\delta \dots (5)$ 、こうして要素内任意点におけるひずみは、 $\epsilon = \alpha TN\delta^e \dots (6)$ 、と書くことができる。これに(3)式を考慮すれば、第 n 番目の調和成分に関して、(6)式は、 $\epsilon_n = B_n\delta_n^e \dots (7)$ 、という形に書き直すことができる。こうして節点パラメータによって要素内のひずみが定められ、有限要素法の周知の手続⁴⁾によって剛性マトリックスを決定することができる。

即ち、 $K_n = \int_A B_n^T D B_n (R d\theta) (L d\eta) \dots (8)$ 、次に、分布荷重に対する等価節点外カベクトル f_n は仮想変位の原理より次のように求められる。要素内の任意点における外カベクトル $q = \{q_\theta, q_\phi, q_z\}$ は要素構成節点 i, j

よにおける節点値とその一次微係数により形状関数を用いて、 $Q = N Q^e \dots (9)$ 、今、分布外力の各成分をフーリエ級数に展開すれば第 n 番目の調和成分について、

$$Q_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \cos n\theta & \sin n\theta \end{bmatrix} Q = C N Q_n^e \dots (10) \quad \text{ここで「」は対角行列を示す。}$$

仮想変位の原理より $R_n = \int_A N^t C^t C N (R d\theta) (L d\tau) Q_n^e \dots (11)$

こうして、(8)式と(11)式によって K_n と R_n が決定できれば、通常の有限要素法の手法によって構造物全体の節点変位ベクトルが決定でき、これを用いて各節点における合応力 σ を求めることができる。なお計算にあたっては(8),(11)式に含まれる τ に関する積分には、ガウスの4点積分を用いた。

3. 解析例 まず、図-3に示すような平底円筒ビンを解析した。解析にあたって、静的穀物荷重にはヤンセンの公式¹⁾を用い、穀物流荷重には Jenike¹⁾の funnel flow に対する圧力分布を用いた。また風荷重の円周方向分布は文献2)と同様にフーリエ級数の最初の7項をとった。使用鋼材は円筒部はコルゲートシートを用い、円錐部は等方性鋼板とした。また境界条件はビン下端で全周固定とした。

図-4,図-5,図-6はそれぞれ N_θ , N_ϕ , M_ϕ について本解析結果を Boresi²⁾と Jerath²⁾による解と比較したものである。これらの図から、膜力 N_θ , N_ϕ については比較的近い値を示しているが M_ϕ に関しては、円筒と円錐の結合部に近づくにつれて、かけ離れた値となっていくことがわかる。これは文献2)の解では円筒と円錐の結合部に適当なバネ定数を仮定しており、この仮定が結合部におけるシエルの円周方向の曲げ剛性を過小に評価することによるものと考えられる。

次に、図-7に示すようなホッパー付サイロを解析した。この場合は荷重及び材料については前述のものと同様に取扱い、境界条件は円筒とホッパーの交差部で u, v, w のみを固定した。図-8は円筒部における子午線に沿った N_θ の分布を示している。これによれば円筒下端付近で穀物流荷重によって生じる合応力 N_θ は、静的穀物荷重によるものに対して約3.5倍にもなり平底ビンの場合よりもその増加の割合が大きくなることがわかる。また図-9は、ホッパー部に生じる N_θ の分布を示したものである。この図から、流出時においてホッパー部に非常に大きな円周方向引張力が作用することがわかる。

4. 結論 前述の例題の解析によって、本解析手法が非対称荷重を受けるサイロの解析に用いて合理的かつ精度よく評価できることがわかる。なお、本解析に使用した計算機は大阪大学大型計算機センターの ACOS-S800 であり、前述の例題の解析に要した CPU TIME は、わずか40秒足らずであったことを付記しておく。

参考文献

- 1) Jenike A.W., 他 : Bin Load Part-2 : Concept, Part-3 : Mass Flow Bins, Part-4 : Funnel Flow Bins, J. Eng. Ind., Feb., 1973.
- 2) Jerath S. and Boresi A.P. : The Analysis of Covered Cylindrical Storage Bins Subjected to Unsymmetrical Load by Shell Bending Theory, T & TM Rept., Univ. of Illinois, Urbana, Sept., 1977.
- 3) Novozhilov V.V. : Theory of Thin Shells, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- 4) ツエングー・ウィット O.C.

著、吉澤雅夫、山田嘉明監訳：マトリックス有限要素法、培風館、1975、pp.267~271

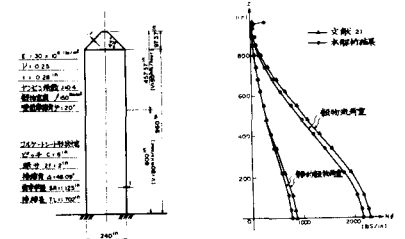


図-3 平底円筒ビン 図-4 $\theta=0^\circ$ における N_θ

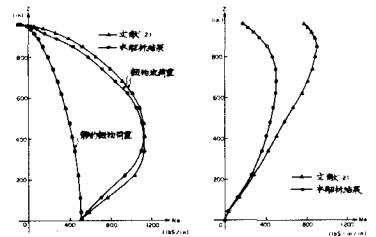


図-5 $\theta=0^\circ$ における N_ϕ 図-6 $\theta=0^\circ$ における M_ϕ

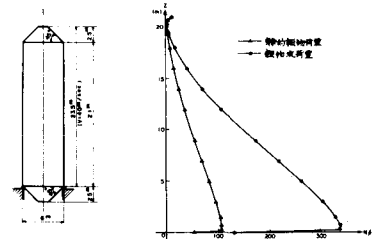


図-7 ホッパー付サイロ 図-8 $\theta=0^\circ$ における N_θ

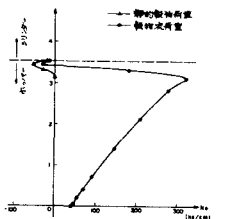


図-9 $\theta=0^\circ$ における N_θ