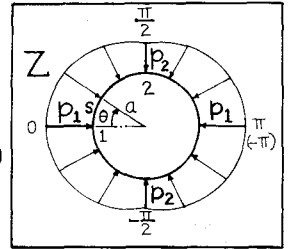


§1. 偏圧分布の仮定 : 右図において、法線方向表面外荷重強度 Z は、

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ のとき } Z(\theta) = p_1 + (p_2 - p_1) \cdot \sin \theta$$

$$-\pi \leq \theta \leq 0 \text{ のとき } = p_1 - (p_2 - p_1) \cdot \sin \theta \text{ とする。}$$

$Z(\theta)$ をFourier余弦展開($Z(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta$)
すると、 $a_0 = p_1 + \frac{2}{\pi}(p_2 - p_1)$, $a_n = -\frac{4}{\pi}(p_2 - p_1) \cdot \frac{1}{n^2 - 1}$ ($n=2, 4, 6, \dots$)
となる。



§2. Ring Beam理論による解 : 伸び剛性 $EA(\alpha)$, 曲げ剛性 $EI(\beta = \frac{EI}{\alpha^2})$ とすると

$$U = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta}(p_2 - p_1) \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \alpha + \frac{5\alpha + \beta}{8} \sin \theta \right) - \left\{ \alpha + \frac{\alpha + \beta}{8} \cdot \theta \cdot (\pi - \theta) \right\} \cdot \cos \theta \right]$$

$$W = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} \left\langle p_1 \beta + (p_2 - p_1) \left[\frac{2}{\pi} \alpha + \frac{3}{8}(\alpha + \beta) \left\{ \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta + \frac{\theta(\theta - \pi) - 3}{3} \sin \theta \right\} \right] \right\rangle \text{ となる。}$$

U : 円周方向
変位
 W : 法線方向
変位

§3. 円筒殻理論による解 : W. Flüggeによると、変位 u, v, w に関して連立偏微分方程式は、次のようにMatrices表示したとき、 L_{ij} が次のようになる。 $C = \frac{Eh}{1 - \mu^2}$, $k = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{\alpha^2}{C} \begin{Bmatrix} -X \\ -Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1 + k) \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1 + \mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial \theta}$$

$$L_{13} = L_{31} = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial y} + k \cdot \left(-\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{1 - \mu}{2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial y \partial \theta^2} \right), \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3 - \mu}{2} \cdot k \cdot \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial \theta}$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (1 + 3k) \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{33} = 1 + k(\nabla^4 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1)$$

$$X = a \cdot y, \quad S = a \cdot \theta, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$$

この方程式は、偏微分演算子 L_{ij} の線型性を利用して、次のような「非連成の開」へと導くことができる。

$$(L_{11}L_{22}L_{33} + L_{12}L_{23}L_{31} + L_{13}L_{32}L_{21} - L_{11}L_{32}L_{23} - L_{12}L_{21}L_{33} - L_{13}L_{22}L_{31}) \cdot W$$

$$= (L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31}) \Phi_X + (L_{12}L_{31} - L_{11}L_{32}) \Phi_Y + (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \Phi_Z$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot U = (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}) \cdot W + L_{22} \Phi_X - L_{12} \Phi_Y$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot V = (L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23}) \cdot W - L_{21} \Phi_X + L_{11} \Phi_Y$$

$$\text{ここに、} \Phi_X = -\frac{a^2}{C} X, \Phi_Y = -\frac{a^2}{C} Y, \Phi_Z = \frac{a^2}{C} Z$$

ここで、 Z を $Z(\theta, y) = (\alpha_n y^2 + \beta_n y + \gamma_n) \cos n\theta$, $u = U(y) \cdot \cos n\theta$, $v = V(y) \cdot \sin n\theta$, $w = W(y) \cdot \cos n\theta$
として、上式へ代入すると、次のような「非連成の連立常微分方程式」が得られる。(X=Y=0.)

$$\left[\frac{d^8}{dy^8} + W_1 \frac{d^6}{dy^6} + W_2 \frac{d^4}{dy^4} + W_3 \frac{d^2}{dy^2} + W_4 \right] \cdot W(y) = W_5 \cdot y^2 + W_6 \cdot y + W_7$$

$$\left[\frac{d^4}{dy^4} + U_1 \frac{d^2}{dy^2} + U_2 \right] \cdot U(y) = \left(U_3 \frac{d^5}{dy^5} + U_4 \frac{d^3}{dy^3} + U_5 \frac{d}{dy} \right) \cdot W(y)$$

$$\left[\frac{d^4}{dy^4} + V_1 \frac{d^2}{dy^2} + V_2 \right] \cdot V(y) = \left(V_3 \frac{d^4}{dy^4} + V_4 \frac{d^2}{dy^2} + V_5 \right) \cdot W(y)$$

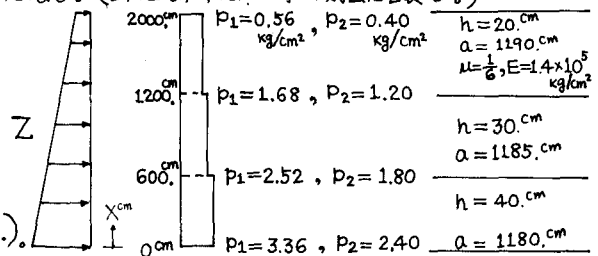
ここに、 $W_1 \sim W_7, U_1 \sim U_5, V_1 \sim V_5$ は、定数係数である。この式の第1式から $W(y)$ が求まると、

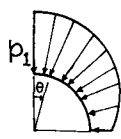
第2, 3式から、 $U(y), V(y)$ が順次求まることになる。(詳細な解は、別の機会に譲る。)

§4. 応用例題 : いま、右図のような

円筒ケーソンに偏圧が作用する場合を計算する。

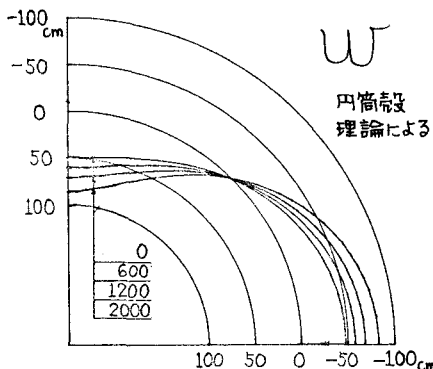
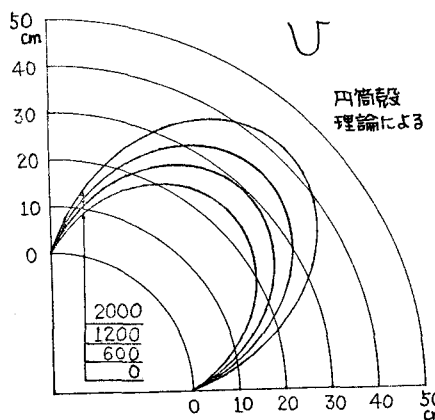
Fourier級数は、 $n=8$ までの計5項まで
をとって計算した。(X=Y=0.) 次頁の表から
 $n=0, 2, 4, 6, 8$ と良く収束していることがわ
かる。境界条件は、自由($N_X = M_X = N_{X\phi}^* = Q_X^* = 0$)。





上段は円筒殻理論
下段はRing Beam
理論による計算
結果。

単位 cm.



V

	$n=0$	$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$
0.	0.	24.205	.089	.005	.001
200.		26.005	.106	.006	.001
400.		27.807	.122	.006	.001
600.		29.619	.140	.007	.001
800.		31.427	.158	.009	.001
1000.		33.233	.177	.010	.001
1200.		35.043	.196	.011	.002
1400.		36.847	.215	.013	.002
1600.		38.646	.233	.014	.002
1800.		40.444	.250	.014	.002
2000.	0.	42.244	.269	.015	.002

W

	$n=0$	$n=2$	$n=4$	$n=6$	$n=8$
0.	.354	49.016	.382	.033	.006
200.	.322	51.963	.424	.034	.006
400.	.299	55.517	.485	.038	.006
600.	.306	59.226	.557	.044	.007
800.	.311	62.890	.634	.052	.009
1000.	.282	66.447	.705	.059	.010
1200.	.290	70.107	.784	.069	.013
1400.	.299	73.746	.864	.078	.015
1600.	.293	77.368	.934	.083	.015
1800.	.180	80.858	1.001	.086	.014
2000.	.120	84.634	1.079	.091	.014

U

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.	0.	12.186	21.039	24.200	20.826	12.030	0.
200.		13.357	26.508	30.481	26.298	15.144	
400.		14.017	24.291	27.211	24.106	13.882	
600.		14.016	24.187	27.801	23.976	13.803	
800.		12.197	22.071	25.401	21.915	12.620	
1000.		14.937	25.771	29.612	25.530	14.695	
1200.		11.517	19.881	22.861	19.723	11.358	
1400.		21.961	47.920	55.104	47.541	27.377	
1600.		15.860	27.352	31.418	27.080	15.584	
1800.		24.677	42.576	48.781	42.259	24.335	
2000.		16.781	28.933	33.223	28.629	16.472	
1200.		21.592	37.271	42.852	36.976	21.293	
1400.		17.704	30.510	35.032	30.180	17.362	
1600.		18.508	31.947	36.736	31.694	18.251	
1800.		63.516	109.64	126.07	108.77	62.640	
2000.		42.344	73.073	84.043	72.514	41.758	
1200.		19.541	33.669	38.632	33.268	19.133	
1400.		20.455	35.241	40.430	34.810	20.018	
1600.		31.158	54.819	63.037	54.385	31.318	
1800.		21.371	36.816	42.229	36.353	20.905	
2000.	0.	21.112	36.546	42.025	36.257	20.879	0.

W

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0.	41.792	42.991	24.634	-.022	-24.315	-41.908	-48.308
200.	61.847	53.783	30.549	-.127	-30.332	-52.194	-60.148
400.	52.749	45.532	26.054	-.096	-25.840	-44.470	-51.246
600.	56.693	48.935	28.003	-.117	-27.806	-47.845	-55.136
800.	56.345	48.611	27.774	-.180	-27.667	-47.541	-54.165
1000.	51.539	44.486	25.457	-.106	-25.278	-43.473	-50.123
1200.	60.140	51.871	29.592	-.244	-29.545	-50.710	-58.400
1400.	46.385	40.037	22.912	-.095	-22.750	-39.146	-45.111
1600.	111.54	96.235	54.950	-.513	-55.127	-94.652	-109.03
1800.	63.816	55.028	31.322	-.314	-31.404	-53.641	-61.989
2000.	99.144	85.542	48.844	-.456	-49.002	-84.135	-96.918
1200.	67.504	58.174	33.038	-.413	-33.210	-56.915	-65.501
1400.	86.751	74.849	42.739	-.399	-42.876	-73.618	-84.802
1600.	71.261	61.370	34.877	-.481	-35.073	-60.039	-69.090
1800.	74.358	64.156	36.633	-.342	-36.751	-63.101	-72.689
2000.	254.76	219.74	125.28	-1.632	-126.60	-217.04	-249.94
1200.	75.003	64.590	36.654	-.550	-36.935	-63.142	-72.615
1400.	212.30	183.12	104.40	-1.360	-105.50	-180.26	-208.23
1600.	78.584	67.653	38.339	-.676	-38.803	-66.277	-76.199
1800.	169.24	146.47	83.517	-1.038	-84.377	-144.67	-166.63
2000.	82.137	70.678	40.016	-.806	-40.671	-69.352	-79.748
1200.	127.38	109.87	62.638	-.816	-63.218	-103.52	-124.97
1400.	85.937	73.947	41.800	-.945	-42.633	-72.642	-83.511
1600.	84.919	73.247	41.759	-.544	-42.198	-72.345	-83.333

この応用問題から次のことが言える。①変位U, Wは、全体として、円筒殻理論の方が R.B 理論より小さ目の値となる。② U は 45° 近辺で最大となる ③ W は p_1 か p_2 の大きい方において内方に変位し、45° 近辺で内外への変位の方が逆転する。(この点で、昭和53年10月の LNG 指針の45° を境としてバネ定数：弾性抵抗を考える行き方は、ある面では、妥当であろうと思われる。) ④ 軸力 N_ϕ 、曲げモーメント M_ϕ 、せん断力 Q_ϕ は、円筒殻理論の方が R.B 理論より、大分小さ目の値となる。(これは、立体としての効果であろう。) ⑤ 軸力 N_ϕ は、縁維近辺において、符号が逆転し、引張となることも、立体(殻としての)解析したことの成果であり、設計上、注意すべきことであろう。

参考文献「Stresses in Shells」 Springer 1960, 「Thin Elastic Shells」 Willey, New York 1967
W. Flügge H. Kraus