I-13　積分方程式を用いた棒の座屈解析

京都大学工学部　学生員　佐守真人
〃　正員　小林昭一

1．はじめに

本研究は，最近，種々の問題に応用されている積分方程式法を，棒の座屈解析に適用したものである。本稿では，Green関数を用いた方法と境界積分方程式法を適用した結果とを対比して示した。

2．Green関数を使用した積分方程式法

はじめに，棒の長さを1とし，棒の一端を原点として棒に沿う座標軸をx軸，それと直交してy軸を選ぶ。

a）2階微分方程式のGreen関数：棒の両端の条件が，両端ヒンジおよび一端自由，他端固定の場合には，棒の座屈の支配方程式は $y''+\lambda y=0$ となる。境界条件を考慮すると，この微分方程式のGreen関数が次のように求まる。

両端ヒンジ（$x=0,1$ で $y=0$），$G(x,\xi)=\begin{cases} \xi(1-x) & x\geqq\xi \\ \xi(1-x) & x<\xi \end{cases}$ ；一端自由,他端固定 $\begin{pmatrix} x=0,\ y=0 \\ x=1,\ y'=0 \end{pmatrix}$，$G(x,\xi)=\begin{cases} x & x\geqq\xi \\ \xi & x<\xi \end{cases}$

このGreen関数を使用すると，境界条件を含めた支配方程式は次の積分方程式に変換される。

$$y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi \qquad \text{-----}\quad (1)$$

b）4階微分方程式のGreen関数：棒の両端の条件が，一端固定，他端ヒンジおよび両端固定の場合には，両端にモーメントおよびせん断力が発生するので，座屈の支配方程式は $y''''+\lambda y''=0$ となる。ここで境界条件を考慮して，次のようなGreen関数を得る。

一端固定 他端ヒンジ $\begin{pmatrix} x=0 & y=y''=0 \\ x=1 & y=y'=0 \end{pmatrix}$，$G(x,\xi)=-\frac{1}{6}\left\{(x-\xi)^3H-\frac{1}{2}(1-\xi)^2(2+\xi)x^3+\frac{3}{2}\xi(1-\xi)^2x\right\}$

両端固定　（$x=0,1$ で $y=y'=0$），$G(x,\xi)=-\frac{1}{6}\left\{(x-\xi)^3H-(1+2\xi)(1-\xi)^2x^3+3\xi(1-\xi)^2x^2\right\}$

ここに，$H=\begin{cases} 1 & (x\geqq\xi) \\ 0 & (x<\xi) \end{cases}$ とした。2,a）と同様にして，次の積分方程式を得る。

$$y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,\xi)\,y''(\xi)\,d\xi \qquad \text{---}\quad (2)$$

表-1　第一固有値の比較

境界条件	正解(×EI)	5分割	10分割	50分割
両端ヒンジ	9.87	10.2 (3.3)	9.95 (0.8)	9.88 (0.1)
一端固定 他端自由	2.47	2.48 (0.8)	2.47 (0.2)	2.47 (0)
一端固定 他端ヒンジ	20.2	21.6 (7.1)	20.5 (1.8)	20.2 (0.2)
両端固定	39.5	42.2 (6.8)	40.5 (2.5)	39.5 (0.1)

（　）内は誤差（%）

c）解析とその結果：式(1)は $y(x)$ を未知関数とする積分方程式である。適当に分割してその区間内で形状関数で近似して，積分を行なうと標準的な代数式 $[G-\lambda'I][Y]=0$ $(\lambda'=1/\lambda)$ を得る。これより固有値，λ $(1/\lambda')$，および固有関数（座屈モード）を求めることは容易である。式(2)を用いる場合には，両辺をxで2回偏微分すると，$y''(x)=\lambda\int_0^1 G''(x,\xi)\,y''(\xi)\,d\xi$ を得，同様にして，固有値，固有関数を求めることができる。形状関数を線形とした場合の結果を表-1に示す。

3．境界積分方程式法

a）基本解：支配方程式が $L(y)\equiv y''''+\lambda y''=0$ で表わされる場合，棒の長さを ℓ とすると基本解は，$\int_0^\ell L(G)\,y\,dx=y(\xi)$ を満足する関数 $G(x,\xi)$ として与えられる。この基本解は具体的には，例えばFourier変換法によって，次のように求められる。

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \sin k(x-\xi)/k^3 & x\leqq\xi \\ (x-\xi)/k^2 & x>\xi \end{cases} \qquad \text{----}\quad (3) \qquad (\text{ここに } k^2=\lambda \text{ とした})$$

b）Greenの公式：作用素Lに対応して，$\int_0^\ell L(G)\,y\,dx-\int_0^\ell L(y)\,dx$ を考える。部分積分を行ない $\int_0^\ell L(y)\,y\,dx=y(\xi)$ $L(y)=y''''+\lambda y''=0$ を考慮すると，次のようなGreenの公式を得る。

$$y(x)=G'''y\Big|_0^l-G''y'\Big|_0^l+G'y''\Big|_0^l-Gy'''\Big|_0^l+\lambda\left\{G'y\Big|_0^l-Gy'\Big|_0^l\right\} \quad ------ \quad (4)$$

この式には，式(3)，および境界条件を考慮すると，yとその導関数のうち4つが未知数として含まれることがわかる。（y, y', y'', y'''の境界での値のうち4個は境界条件で与えられている。）

c) 解析とその結果：式(3)および式(4)より固有値を求めてみる。式(4)において，極限操作（$x\to 0$ または $x\to l$）を行なうと，式(4)の左辺は境界条件より 0 となり，$[G][Y]=0$ （$[G]$は$k(\lambda)$を含む正方行列，$[Y]$は4つの未知数からなる列ベクトル）の形に帰着できる。$[Y]$が解をもつためには$|G|=0$でなければならない。この$|G|=0$という条件より，固有値，固有関数を求めることができる。$|G|$の例を示すと次のようである。

両端ヒンジ

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{k^3}\sin kl & 0 & 0 \\ -\frac{l}{k^2} & 0 & -l & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}\sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

一端固定，他端自由

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ \cos kl & \frac{1}{k}\sin kl & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

一端固定，他端ヒンジ

$$\begin{vmatrix} -\frac{l}{k^2} & 0 & -\frac{1}{k^2} & -l \\ 0 & \frac{1}{k^3}\sin kl & -\frac{1}{k^2}\cos kl & 0 \\ 0 & \frac{1}{k}\sin kl & \cos kl & 0 \\ \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

両端固定

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{k^3}\sin kl & \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2}\cos kl \\ -\frac{l}{k^2} & 0 & \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2}\cos kl & 0 & -\frac{1}{k}\sin kl \\ -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

これら$|G|$の値より座屈条件式は次のようになる。

$\sin kl=0$ 　　　 $\cos kl=0$ 　　　 $\tan kl=kl$ 　　　 $\sin\frac{kl}{2}$ or $\tan\frac{kl}{2}=\frac{kl}{2}$

次に2本の棒が剛結された場合を考えてみる。ここで2本の棒の長さ，曲げ剛性，たわみをそれぞれ，l, m; E_1I_1, E_2I_2; u, v としておく。個々の棒について式(4)を考え，境界条件と2本の棒の剛結の条件（適合条件）を考慮すると，8個の未知数を含む式が，1本の棒の場合と同様にして求められる。両端の境界条件によって異なった座屈条件式が求められるが，両端固定の例を示すと次のような正方行列$|G|$を得る。

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 1 & -l & \frac{1}{k^2} & -\frac{l}{k^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k^2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k^2}\cos kl & -\frac{1}{k^3}\sin kl & 1 & 0 & \frac{2}{k^2} & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{m}{h^2} \\ \frac{1}{k}\sin kl & -\frac{1}{k^2}\cos kl & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{k^2} & 0 & -\frac{1}{h^2} \\ \cos kl & \frac{1}{k}\sin kl & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -k\sin kl & \cos kl & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{k^2}\cosh hm & -\frac{1}{hk^2}\sinh hm & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{k^2}\sinh hm & -\frac{1}{k^2}\cosh hm & 0 & \frac{1}{h^2} \end{vmatrix}$$

ここに
$P/(E_1I_1)=k^2$
$P/(E_2I_2)=h^2$
とした

これより，座屈条件式は

$$|(k-k\cos kl\cosh hm+h\sin kl\sinh hm)(h-h\cos kl\cosh hm+k\sin kl\sinh hm)$$
$$-(h\sinh hm\cos kl+k\sin kl\cosh hm)(kh(l+m)-h\sin kl\cosh hm-k\sinh hm\cos kl)|=0 \quad --- (5)$$

を得る。$k=h$とすると，$\sin\frac{k}{2}(l+m)=0$ or $\tan\frac{k}{2}(l+m)=\frac{k}{2}(l+m)$ となる。他の境界条件の場合にも同様にして解が得られる。

図-1に式(5)より求まる第一固有値を示した。ここに，$t=(E_2I_2)/(E_1I_1)$，$l+m=1.0$ とし，横軸はlの値，縦軸には固有値をとってある。

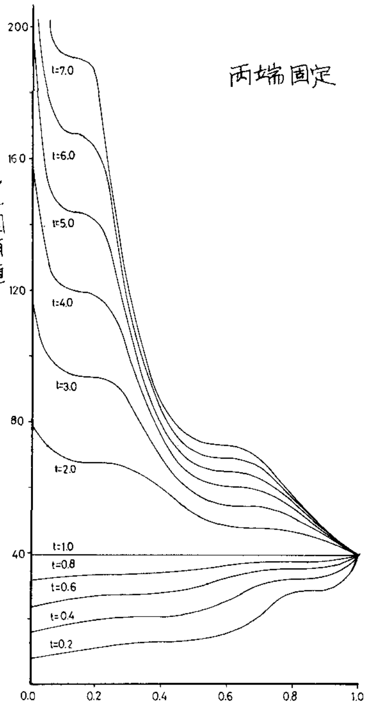

図-1　第一固有値とlの関係

4. おわりに

本稿では2種類の積分方程式法を紹介した。Green関数を用いる方法は，境界条件は正確に満足できるが，Green関数を見付けること，領域積分を行なわなければならない欠点がある。これに対して，境界積分方程式法は境界積分だけでよいという利点がある。