

京都大学工学部 正 員 丹羽義次

京都大学工学部 正 員 小林昭一

京都大学大学院 学生員 ○北原道弘

[1] はじめに 平板の固有振動および座屈の問題は、その理論的かつ工学的重要性のため古くから研究されており、Leissa による総括的報告¹⁾に挙げられた文献にその歴史的発展過程を見ることが出来る。この状況にあって、ここで積分方程式法により固有値解析を行なう目的は、任意幾何形状、任意境界条件を有する板問題に対し、高次固有値を含め、固有値をより正確に求める最も一般的手法を確立しようと試みよものである。積分方程式法²⁾によれば、領域内部の情報と全く含まない形で固有値問題をより有効に定式化することが出来る。今までの解析が明らかにされた本手法の特徴として、1) 本手法により求まる固有値は、境界分割数にある意味で無関係であること。2) 原理的には無限個の固有値が求まり、数値計算上も、高次固有値は低次固有値と同程度の精度で求まる点などが挙げられよう。本手法は、いわゆる周波数方程式と基本解を介して任意形状境界に沿って作成する方法と言えよう。固有振動問題に対しては、固定、単純、自由支持、3つの境界条件に対して、本手法は有効な手法であることが確認された³⁾。本報告は、定式化と一様面内力を受ける薄板の振動問題にまで拡張し、この問題の基本解を示し、この極限として、振動問題、引張問題、圧縮問題の基本解を示す。この時、微分作用素自身の持つ性質に起因する固有値の一般的性質が明らかになる。この段階において各問題の固有値の実際の値は、与えられた形状と各問題に対する境界条件の性質により決まることになる。さらに、数値実験的に上に述べた性質1)と確認した後、座屈問題の固有値解析にも本手法が精度よく適用できることを示そう。

[2] 一様面内力を受ける板の振動問題の基本解 一様面内力 N ($N_x = N_y = N$, $N_{xy} = 0$) と受ける等方均質板の定常場(時間に対しては $e^{i\omega t}$ 的とする)と支配する微分方程式は、横荷重がない場合次のようになる。

$$\Delta \Delta u = (\Delta^2 + \beta^2 \Delta - \lambda^4) u = 0 \quad \dots (1)$$

ここに、 $\lambda^2 = \rho h \omega^2 / D \geq 0$, $\beta^2 = N/D \geq 0$; $D = E h^3 / 12(1 - \mu^2)$, Δ : ラプラスアン, β の前の $+$ は、 $-$: 引張問題 (N は引張り力が正), $+$: 圧縮問題 (N は圧縮が正) を意味する。 (1) 式の特異方程式の根を $\alpha^2 = \frac{1}{2}[\sqrt{5 + 4\lambda^2} + \beta^2] \geq 0$, $\beta^2 = \frac{1}{2}[\sqrt{5 + 4\lambda^2} - \beta^2] \geq 0$ (符号は上が引張、下が圧縮問題) と定義すれば、 (1) 式的作用素 $\Delta \Delta$ は2つの作用素積に分解されて、各問題について次のように書ける。

$$(I) \text{ 面内力を受けた板の面外振動 } \Delta \Delta u = (\Delta + \alpha^2)(\Delta + \beta^2) u = 0 \quad \dots (2)$$

$$(II) \text{ 面外振動 } \Delta \Delta u = (\Delta - \lambda^4) u = (\Delta + \beta^2)(\Delta - \lambda^2) u = 0 \quad (\beta^2 = 0, \alpha^2 = \beta^2 = \lambda^2) \quad \dots (3)$$

$$(III) \text{ 面内引張 } \Delta \Delta u = \Delta(\Delta - \beta^2) u = 0 \quad (\lambda^2 = 0, \alpha^2 \rightarrow 0, \beta^2 = \beta^2) \quad \dots (4)$$

$$(IV) \text{ 面内圧縮 } \Delta \Delta u = \Delta(\Delta + \beta^2) u = 0 \quad (\lambda^2 = 0, \alpha^2 = \beta^2, \beta^2 \rightarrow 0) \quad \dots (5)$$

λ^2, β^2 ともに α^2, β^2 が零又は正の実数であること、さらに、解 u は各因子作用素 (たとえば $\Delta + \alpha^2$) の解の重ね合わせとして表われることに注意すれば、これらの問題の固有値(この場合、正の実数)の性質は、 $\Delta + \alpha^2, \Delta + \beta^2$ なる Helmholtz 作用素に対する基本解の性質により決まることかわかる⁵⁾。(面内引張問題の固有値は存在しない。)(2) 式の放射条件と満足する基本解は既知の方法により簡単に求まり、極限として(3)-(5)の基本解が求まる。

$$(I) \text{ 面内力を受けた板の面外振動 } G(r) = \frac{1}{2\pi\beta^2} \left[H_0^{(1)}(\alpha r) - H_0^{(1)}(i\beta r) \right] \quad \dots (6)$$

$$(II) \text{ 面外振動 } G(r) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \left[H_0^{(1)}(\lambda r) - H_0^{(1)}(i\lambda r) \right] \quad \dots (7)$$

$$(III) \text{ 面内引張 } G(r) = \frac{1}{2\pi\beta^2} \left[\log \frac{1}{r} - K_0(\beta r) \right] \quad \dots (8)$$

$$(IV) \text{ 面内圧縮 } G(r) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} H_0^{(1)}(\beta r) - \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right] \quad \dots (9)$$

ここに、 $H_0^{(1)}(z)$ は 0 1 種 0 次 Hankel 関数、 $K_0(z)$ は変形 Bessel 関数、 r は 2 点間の距離を表わしている。

[3] 境界条件と積分方程式

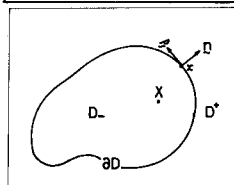


Fig. 1 に示したような形状の板に対し、境界条件は次の4つのうちの2つとなる。

- 1) $T_n(u) = 0, 2) T_{nn}(u) = 0, 3) T_{\tau\tau}(u) = \tau[\Delta - (1-\nu)\partial^2]u = 0, 4) T_{\tau n}(u) = [T_{nn} + (1-\nu)\partial^2]u = 0$

積分表示式は、2つのポテンシャルの重ね合わせによる次の表示を採用する。

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y) \mu_1(y) ds_y - \int_{\partial D} [\int_{\partial D} G(x, y) \mu_2(y) ds_y]$$

$$B_i u(x) = 0 \quad x \in \partial D, (B_i \text{ は } i=1 \sim 4 \text{ に示した}$$

境界作用素, $i=1, 2$) に非自明解が存在する

時のパラメーターの値として各問題に対する固有値が求まる。

[4] 数値解析例

(1) 性質1)の検証。Table 1~4は、振動問題に対して、本手法による固有値解析の1つの特徴である、境界分割数 N と固有値の関係を数値的に検討したものである。形状は半径10の円形を選び、密度は各分割区間で一定と仮定し、円周上でGauss積分法を適用した。 m は節線の数を、 s は節円の数を表わし、 $\bar{\lambda}_j$ はNASAの結果、 λ_j は本手法による結果を表わしている。Table 1, 2は $N=1$ (境界分割が行なわれていない)に対する結果であり、積分精度が向上すれば(8point $\rightarrow$ 48point) $m=0$ に対応する、すなわちこの固有値がゴニム数パーセントの相対誤差で求まっていることがわかる。Table 3, 4は $N=2$ に対する結果であり、 $m=1$ に対応する固有値が新たに同じ精度で求まっていることがわかる。

(2) 座屈問題の固有値。Table 5は円形固定板、Table 6は円形単純支持板、Table 7は四角形単純支持板に対し、固有値 $J = 1/\sqrt{6}$ を求めたものである。各Tableの値は上から順に、比較値、本手法による結果、相対誤差を示している。また、四角形固定板に対しては、本手法により求めた基本座屈パラメーターは $J(=1/\sqrt{6}) = 5.5$ であり、Iguchi⁶⁾による結果は5.3036である。最も重要な値は基本座屈パラメーターであるが、高次座屈は節線に沿って拘束を受ける板の場合に現われ、全体座屈を防ぐ目的で補剛材を入れる場合などの目安となるという意味で重要となろう。

[5] おわりに

積分方程式法による固有値解析の1つの特徴が明らかにされ、才1固有値は $N=1$ で0.13%の相対誤差で求まること示された(円形固定板)。座屈問題の固有値解析にも本手法は非常に精度よく適用されることが数値的に確認された。今後、面内圧縮を受けた、面外振動問題(2)についても考えてみたい。

参考文献 1) 円羽, 小林, 北原; 弾性固有値問題の積分方程式による解法, 論文集, No. 205, 1979. 2) 円羽, 小林, 北原; 積分方程式による平板の固有振動解析について, 才32回年次講演会. 3) 同; 54年度関西支部講演会. 4) Leissa, W.; Vibration of Plates, NASA SP-160, 1969. 5) 溝畑茂; 偏微分方程式論, 岩波, 1965. 6) Iguchi, S.; Allgemeine Lösung der Kriechungs Aufgabe für Rechteckige Platten, Ing. Arch., Bd. 7, pp. 207-215, 1936. 座屈問題の比較値については、Table 5~7中に示した。

Table 1 $N=1, \Delta=0.1$, Gauss 8 Point

s	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)
0	3.196	3.2	0.13
1	6.306	6.3	0.01
2	9.439	9.5	0.65
3	12.577	12.9	2.57
4	15.716	15.6	0.74
5	18.857	19.2	1.82
6	21.997	23.2	5.47
7	25.138	26.5	5.42
8	28.279	31.9	12.80
9	31.420	—	—

Table 2 $N=1, \Delta=0.1$, Gauss 48 Point

s	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)
0	3.196	3.2	0.13
1	6.306	6.3	0.10
2	9.439	9.4	0.41
3	12.577	12.6	0.18
4	15.716	15.7	0.10
5	18.857	18.9	0.23
6	21.997	22.0	0.01
7	25.138	25.1	0.15
8	28.279	28.3	0.07
9	31.420	31.4	0.06

Table 3 $N=2, \Delta=0.1$, Gauss 8 Point

s	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)
0	3.196	3.2	0.13	4.611	—	—
1	6.306	6.3	0.10	7.799	8.2	5.14
2	9.439	9.5	0.65	10.958	10.9	0.53
3	12.577	12.6	0.18	14.109	14.1	0.07
4	15.716	15.6	0.53	17.256	17.5	1.41
5	18.857	18.9	0.23	20.401	20.5	0.49
6	21.997	22.2	0.92	23.545	—	—
7	25.138	—	—	26.689	26.9	0.79
8	28.279	28.5	0.78	29.832	30.0	0.56
9	31.420	31.2	0.70	32.976	32.5	0.90

Table 4 $N=2, \Delta=0.1$, Gauss 48 Point

s	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)	$\bar{\lambda}_j$	λ_j	$ \bar{\lambda}_j - \lambda_j /\bar{\lambda}_j$ (%)
0	3.196	3.2	0.13	4.611	—	—
1	6.306	6.3	0.10	7.799	8.1	3.86
2	9.439	9.4	0.41	10.958	10.9	0.53
3	12.577	12.6	0.18	14.109	14.0	0.77
4	15.716	15.7	0.10	17.256	17.4	0.83
5	18.857	18.9	0.23	20.401	20.5	0.49
6	21.997	22.0	0.01	23.545	23.4	0.62
7	25.138	25.1	0.15	26.689	26.8	0.42
8	28.279	28.3	0.07	29.832	30.0	0.56
9	31.420	31.4	0.06	32.976	32.9	0.23

s	0	1	2	3	4	5	6	
0	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771	9.936	11.086	12.225
1	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77	9.93	11.06	12.19
2	0.05	0.08	0.00	0.03	0.01	0.05	0.23	0.29
3	7.016	8.417	9.761	11.065	Table 5			
4	7.02	8.42	9.76	11.06	*) NASA SP-160, Ch.10, 1969			
5	0.06	0.04	0.01	0.05				
6	10.173	11.620						
7	10.17	11.62						
8	0.03	0.00						

*) NASA SP-160, Ch. 10, 1969

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
1	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
2	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
3	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
4	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
5	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
6	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
7	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
8	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)
9	2.49 (2.405)	3.832 (3.832)	5.136 (5.136)	6.380 (6.380)	7.588 (7.588)	8.771 (8.771)	9.936 (9.936)	11.086 (11.086)	12.225 (12.225)

Table 6

s	1	2	3	4	5	6	7
1	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
2	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
3	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
4	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
5	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
6	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
7	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
8	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
9	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)

Table 7

s	1	2	3	4	5	6	7
1	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
2	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
3	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
4	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
5	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
6	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
7	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
8	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)
9	4.443 (4.4)	7.025 (7.0)	9.535 (9.5)	12.953 (12.9)	16.019 (16.0)	19.110 (19.1)	22.214 (22.2)