

都立大学工学部 正員 西村 和夫

東北大学工学部 正員 佐武 正雄

1. 序 論

トラスによって規則的に構成された2次元大形構造物を、偶応力を考慮した一般化された連続体(コセーラ-連続体)として解析することが考えられているが、この場合、偶応力を考慮した有限要素モデルを導入し、そのモデルによる構造解析が可能である。本研究では、トラス構造に対応するコセーラ-連続体としての構成方程式を誘導し、これを用いて、トラスの1パネルもしくは複数パネルを1有限要素とする振動解析例を示し、その精度と演算時間の縮小について考察を加える。

2. 偶応力を考慮したFEモデル¹⁾

図-1に示す長方形要素を考え、その要素に、重心Gを原点とする局所座標による次の変位関数を導入する。

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{すなわち } \{u\} = [N]\{d\} \quad (2)$$

節点変位 $\{d\}$ は

$$\{d\} = \{u_A, v_A, u_B, \dots, v_D\}^T = [A]\{d\} \quad (3)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -a & b & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & b & -ab \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(1)の変位場による要素の歪として次式を定義する。

$$\{e\} = \{e_{11}, e_{22}, e_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23}\}^T \quad (5)$$

ここに

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x,y=0} = \alpha_2, & e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{x,y=0} = \alpha_7 \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{x,y=0} = \frac{1}{2} (\alpha_3 + \alpha_6) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\kappa_{13} = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = -\frac{1}{2} \alpha_4, \quad \kappa_{23} = \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \alpha_8$$

ここで κ_{13}, κ_{23} は回転勾配(rotational gradient)である。

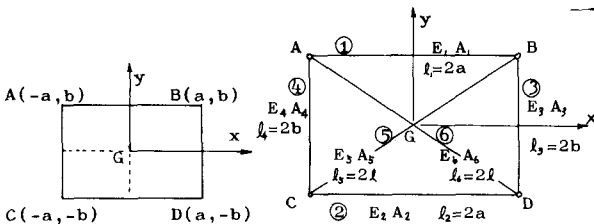


図-1 長方形FEモデル

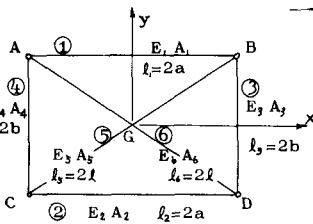


図-2 長方形トラスの単位要素

次に、要素の歪 $\{e\}$ に抵抗する要素の応力として

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{12}, \mu^{13}, \mu^{23}\}^T \quad (7)$$

を導入する。ここで μ^{13}, μ^{23} は偶応力(Couple Stress)である。一般に、弾性法則は

$$\{\sigma\} = [D]\{e\} \quad (8)$$

仮想仕事の原理を用いれば、剛性マトリックス $[S]$ は

$$[S] = 4ab \{[A]^T [B]^T [D] [B] [A]\} \quad (9)$$

3. トラスパネルに対応した構成方程式

図-2に示すようなトラスパネルに式(7)の変位場を与える。この変位場によるトラスの各節点変位 $\{d\}$ からトラスパネルの歪エネルギー U が求められる。一方、(8)式から歪エネルギー-密度 $\bar{u}$ が求められる。

$$U = 4ab \bar{u} \quad (10)$$

が成立する。これより次の構成方程式が決定できる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{12} \\ \mu^{13} \\ \mu^{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_{xy} & d_x & 2b_x & 0 \\ D_{xy} & D_y & d_y & 0 & 2b_y \\ d_x & d_y & G & 0 & 0 \\ 2b_x & 0 & 0 & 4B_x & 0 \\ 0 & 2b_y & 0 & 0 & 4B_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{2} (\bar{D}_1 + \bar{D}_2) + (\bar{D}_3 + \bar{D}_6) \cos^2 \theta, & B_x &= \frac{1}{2} b^2 (\bar{D}_1 + \bar{D}_2) \\ D_y &= \frac{1}{2} (\bar{D}_3 + \bar{D}_4) + (\bar{D}_5 + \bar{D}_6) \sin^2 \theta, & B_y &= \frac{1}{2} a^2 (\bar{D}_3 + \bar{D}_4) \\ D_{xy} &= (\bar{D}_3 + \bar{D}_6) \cos^2 \theta \sin^2 \theta = G \end{aligned} \quad (12)$$

$$d_x = (\bar{D}_5 - \bar{D}_6) \cos^2 \theta \sin \theta, \quad b_x = \frac{1}{2} b^2 (-\bar{D}_1 + \bar{D}_2)$$

$$d_y = (\bar{D}_5 - \bar{D}_6) \cos \theta \sin^2 \theta, \quad b_y = \frac{1}{2} a^2 (-\bar{D}_3 + \bar{D}_4)$$

ただし、 $\bar{D}_m = A_m E_m / h$ (有効剛性) である。(図-3 参照)

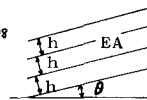


図-3 平行部材節

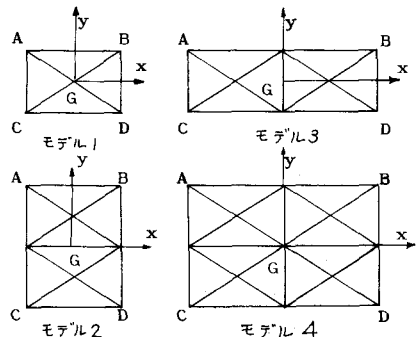


図-4 各要素モデル

質量マトリックス[M]は、Pを密度とすれば

$$[M] = \int_V \{[A]^T [N]^T P [N] [A]\}^T dV \quad (13)$$

ここで、体積分は、各トラス部材に沿った線積分による。行なう。

4. 数値計算例および考察

前節で示した方法により、任意の複数トラスパネルを1有限要素とする解析が可能である。本節では、図5に示す等断面片持トラス梁について、図4に示す4つのモデルを1有限要素とした固有振動解析の結果について示し、考察を加える。結果は辺長比 b/a と横軸に、次式で与えられる誤差を表わすパラメータ α と縦軸にとり表わす。

$$\alpha = \left(\frac{\text{各モデルによる固有振動数}}{\text{棒要素による固有振動数}} - 1 \right) \times 100 \quad (14)$$

(%)

図6は各モデルを用いた時の1次振動数についての α 値であり、モデル2とモデル3の結果から、同数のトラスパネルを1要素とする場合でも、その組合せ方により精度が影響を与えることが判る。図7はモデル2を用いた時の1次から5次振動数までの α 値である。伸縮(水平方向振動)モードは曲げ(鉛直方向振動)モードに比べ、 b/a の影響をあまり受けない。図8は Lumped Mass Matrix を用いた場合の α 値である。いずれの場合にも b/a が小さい(要素が扁平)な場合を除けば十分な精度が得られる。表1は演算時間、剛性マトリックスの大きさと精度についての比較を示したものであるが、精度の低下(α 値の増加)に比べ、演算時間の縮小が大幅である。

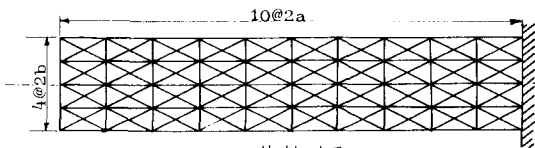


図5 片持トラス梁

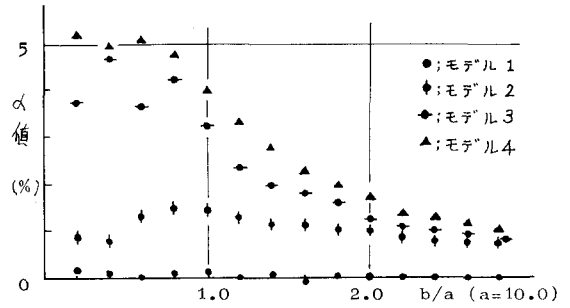


図6 各モデルによる1次振動数の α 値

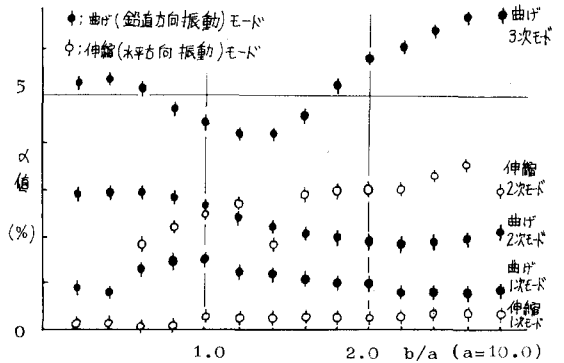


図7 モデル2による各振動数の α 値

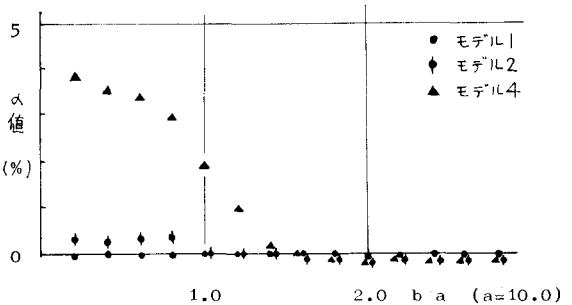


図8 Lumped Mass による1次振動数の α 値

5. あとがき

偶応力を考慮したFEモデルを用いたトラス構造の振動解析について述べた。本方法を用いて、複数のトラスパネルを1要素とし、その要素に対応した構成方程式を誘導すれば、それを用いて記憶容量および演算時間を大幅に減少することが可能である。以上で本方法は有効であり、大規模構造物などの応用が考えられる。

- 参考文献 1) 佐武 正雄; 偶応力を考慮したFEモデルについて, 昭和52年度土木学会東北支部技術研究発表会講演要旨, pp.46-47, 1978
 2) 西村, 佐武; 連続体の考察によるトラス構造解析の研究, 昭和53年度土木学会東北支部技術研究発表会講演要旨, pp.13-14, 1979
 3) 佐武, 西村; 偶応力を考慮したFEモデルとその応用, 日本鋼構造協会第9回大会研究発表会マトリックス解析法研究発表論文集(1979)