I-10　有限要素特性の積分に関する考察

センチュリリサーチセンタ(株)　正員　武田　洋

1．まえがき

有限要素解析の精度はその解析に用いる有限要素の形状関数に大きく依存していることは周知であり，様々な問題に対して種々の有限要素定式と数多くの有限要素補間関数が提案されている。有限要素定式を大別すると，変位を独立変数とする変位形定式，応力を独立変数とする応力形定式および変位と応力を独立変数とする混合形定式などがあるが，コンピュータプログラム作成のための容易性やその汎用性の観点から変位形定式に基づく有限要素法が広く用いられている。

変位形定式において複雑な形状または補間関数を持つ有限要素を用いる場合，その要素特性を陽な形で導びきそれをプログラムすることは困難であり，一般には数値積分法を用いて評価される。数値積分法を用いる場合，その積分を厳密に行うための積分点（標本点）の位置と数は被積分関数の次数に依存して定まる。

実際の有限要素特性を計算する場合に，必要となる積分点の数よりも少ない積分点を用いる reduced integration 法が提案されており，これにより解析精度の向上が計れるとともに計算時間の節約が行なわれることが報告されている。この手法に対して，その精度向上の理由づけも補間関数の性質を用いてある程度行なわれているが，有限要素定式の観点からの解釈はいまだ不明確であると思われる。本論文では変位形定式において reduced integration 法を用いて剛性マトリックスを計算する場合について，有限要素定式の立場から検討を加えるとともに，それと等価な意味を持つ混合形有限要素定式を導びき，さらにその定式化についてエネルギ原理としての対応づけを行う。

2．Reduced Integration 法に対する考察

ここでは変位形有限要素定式において reduced integration 法を用いて要素の剛性マトリックスを計算する際に導入される付加の仮定について検討し，reduced integration 法を用いる場合と等価な一種の混合形有限要素定式を導びくことにする。まず標準的な変位形定式における基礎式を列挙すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \tag{1}$$

上式において $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ は要素内部における変位，ひずみおよび応力であり，$\hat{\mathbf{u}}$ は要素節点における変位，$\mathbf{N}$ は形状関数，$\mathbf{E}$ は弾性マトリックスである。要素剛性マトリックス $\mathbf{k}$ は次のように表わせる。

$$\mathbf{k} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B}\, dv = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{B}_i^T \mathbf{E}_i \mathbf{B}_i \,\omega_i^{(n)} \right) \tag{2}$$

ここで n は数値積分を厳密に行うために必要とされる積分点の数であり，$\omega_i^{(n)}$ は n 点積分を行う場合の i 点における重み係数であり，Gauss 積分法を用いる場合には n 個の点を用いることにより $(2n-1)$ 次の多項式まで積分することができる。

Reduced Integration 法を用いると次のようになる。

$$\overset{*}{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^{m} \left(\mathbf{B}_j^T \mathbf{E}_j \mathbf{B}_j \,\omega_j^{(m)} \right) = \int \overset{*}{\mathbf{B}}{}^T \mathbf{E} \overset{*}{\mathbf{B}}\, dv \;;\; (m<n) \tag{3}$$

従って Reduced Integration 法を用いた場合には，その要素の形状関数 $\mathbf{N}$ から導びかれる $\mathbf{B}$ に更に他のモードが付け加わったことと等価であると考えられる。

以上のことを詳細に検討するためにここで一般化変位を用いる変位形定式を考える。一般化変位を用いて要素内部の変位とひずみを表わすと次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} \\ \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} \quad : \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{G}^{-1}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{A}\mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \qquad (\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{H}) \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}_\alpha \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B}_\alpha \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \qquad (\mathbf{B} = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{H}) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}$ は一般化変位，$\mathbf{A}$ は一般化変位を用いて要素内部の変位を近似するための変位仮定のマトリックスである。この場合も標準的な変位形有限要素定式の場合と同様に要素剛性マトリックスを導びくことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{H}^T \int \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{E} \mathbf{B}_\alpha\, dv\, \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{k}_N \mathbf{H} \\ \mathbf{k}_N &= \int \mathbf{B}_\alpha^T \mathbf{E} \mathbf{B}_\alpha\, dv = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{B}_{\alpha i}^T \mathbf{E}_i \mathbf{B}_{\alpha i}\, \omega_i^{(n)} \right) \end{aligned} \tag{5}$$

ここで $\mathbf{k}_N$ は固有剛性 (natural stiffness) マトリックスと

呼ばれるものであり，従って reduced integration 法を解釈すると次のようになる。

$$\overset{*}{\mathbf{k}} = \mathbf{H}^T \overset{*}{\mathbf{k}}_N \mathbf{H} \;:\; \overset{*}{\mathbf{k}}_N = \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{B}_{\alpha_j}^T \mathbf{E}_j \mathbf{B}_{\alpha_j} \omega_j^{(m)}) = \int \overset{*}{\mathbf{B}}_\alpha^T \mathbf{E} \overset{*}{\mathbf{B}}_\alpha dV \tag{6}$$

上式より要素剛性マトリックスを計算する際の積分の意味が式(3)よりも明確となり，reduced integration法を用いた場合には変位仮定$\mathbf{H}$から得られる$\mathbf{B}_\alpha$と異なるひずみ仮定$\overset{*}{\mathbf{B}}_\alpha$が剛性マトリックス計算のために用いられている。

次に式(6)と等価な形が導びかれる有限要素定式を考えよう。まず仮想仕事式を次のように表わす。

$$\int \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \hat{\mathbf{P}} \tag{7}$$

式(7)に式(1)を代入すると次の平衡方程式が得られる。

$$\int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV = \hat{\mathbf{P}} \tag{8}$$

次に応力を一般化力$\boldsymbol{\beta}$を用いて次のように仮定する。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} \tag{9}$$

ここでZは一般化力より要素内部の応力を表わす応力仮定のマトリックスであり，式(9)(8)より次式が得られる。

$$\hat{\mathbf{P}} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{Z} \, dV \boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\beta} \;:\; \mathbf{L} = \int \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \, dV \tag{10}$$

上式は一般化力と節点力の関係であり，応力形有限要素定式では平衡系の一つが選ばれるが，ここでは平衡系を強制しない。以降の定式は補仮想仕事の原理を用いた応力形定式に従って要素剛性マトリックスを導びくことができる。補仮想仕事の原理は次のように表わせる。

$$\int \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \delta \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{u}} \tag{11}$$

上式に式(9)を代入すると次式が得られる。

$$\delta \boldsymbol{\beta}^T \int \mathbf{Z}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z} \, dV \boldsymbol{\beta} = \delta \hat{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{u}} \tag{12}$$

ここで式(10)を考慮に入れると次のようになる。

$$\begin{aligned} &\delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{f} \boldsymbol{\beta} = \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} \;;\; (\mathbf{f} = \int \mathbf{Z}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z} \, dV) \\ &\mathbf{f} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} \\ &\boldsymbol{\beta} = \mathbf{f}^{-1} \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} \\ &\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\beta} = \mathbf{L}^T \mathbf{f}^{-1} \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} \\ &\underset{\sim}{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{P}} \;;\; \underset{\sim}{\mathbf{k}} = \mathbf{L}^T \mathbf{f}^{-1} \mathbf{L} \end{aligned} \tag{13}$$

従って reduced integration 法を用いた変位形有限要素定式は以上に説明した混合形有限要素法において変位仮定$\mathbf{N}$（または$\mathbf{B}$）と別の応力仮定$\mathbf{Z}$を用いて要素特性を積分することと等価であると考えられる。

3. エネルギ原理としての考察

前節に reduced integration 法の積分段階で導入される仮定について考察を加え，それと等価な意味を持つと考えられる混合形有限要素定式を導びいたが，ここではこの混合型定式に対するエネルギ原理について考察する。

Hellinger-Reissner汎関数は次のように表わされる。

$$\Pi_R = \int (\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}^T \mathbf{F}) \, dV - \int \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \, dS \tag{14}$$

次に有限要素系について次のように仮定する。

$$\Pi_R = \sum \Pi_R^{(e)} \tag{15}$$

ここで$\Pi_R^{(e)}$は式(14)を要素(e)について評価するものとする。要素内部で次式を仮定する。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta}^e \\ &\mathbf{u} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}}^e \;;\; \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}^e \end{aligned} \tag{16}$$

式(16)を式(14)に代入すると次式が得られる。

$$\Pi_R^{(e)} = \boldsymbol{\beta}^{eT} \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^e - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^{eT} \mathbf{f}^e \boldsymbol{\beta}^e - \hat{\mathbf{u}}^{eT} \hat{\mathbf{q}}^e \tag{17}$$

ここで

$$\begin{aligned} &\mathbf{L} = \int_{V^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{B} \, dV \;,\quad \mathbf{f}^e = \int_{V^e} \mathbf{Z}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{Z} \, dV \\ &\hat{\mathbf{q}}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{F} \, dV + \int \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} \, dS \end{aligned} \tag{18}$$

ここで個々の要素について$\pi_R^{(e)}$が停留となるという条件を課すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi_R^{(e)}}{\partial \boldsymbol{\beta}^e} = \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^e - \mathbf{f}^e \boldsymbol{\beta}^e = 0 \\ &\frac{\partial \pi_R^{(e)}}{\partial \hat{\mathbf{u}}^e} = \mathbf{L}^T \boldsymbol{\beta}^e - \hat{\mathbf{q}}^e = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

従って式(19)からβ^eを消去すると次式が得られる。

$$\mathbf{L}^T (\mathbf{f}^e)^{-1} \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}^e = \hat{\mathbf{q}}^e \tag{20}$$

これは前節で導びかれたものと同一である。この定式では個々の要素について停留条件を課したのち，$\hat{u}^e$を全体系と関連づけることにより系全体の方程式が得られる。

以上のことより reduced integration 法は Hellinger-Reissner 汎関数から導びかれる混合形定式を修正し，停留条件を個々の要素について課する一種の修正混合法（modified mixed method）と等価であると考えられる。