I-9　グレイド2の材料の理論に基ずく有限要素解析

東北大学工学部　正員　岸野佑次

1. まえがき

いわゆるグレイド2の材料の理論[1]は微視構造を考慮に入れた一つの連続体力学モデルであり，力学量の微視的不均一性の統計論的考察を介して導くことも可能である[2]。この一般化された理論に基ずく有限要素解析について考察を行っておくことは，グレイド2の材料の理論に含まれる偶応力理論や古典理論の解析を行う上でも有用であると考えられる。本文はグレイド2の材料の理論の有限要素解析に関する一般的考察並びに偶応力理論に対する適用例を示したものである。

2. グレイド2の材料の理論の概要

微小変形を仮定し，デカルト座標を用いて表示すれば次の方程式系を得る。

（平衡方程式）

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0 \qquad (1)$$

（構成方程式）

$$\sigma_{ij} = \partial W_I / \partial \varepsilon_{ij} - \partial_k \mu_{kij} \qquad (2)$$

$$\mu_{ijk} = \partial W_I / \partial \kappa_{ijk} \qquad (3)$$

（歪－変位関係式）

$$\varepsilon_{ij} = \partial_{(i} u_{j)} \qquad (4)$$

$$\kappa_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k \qquad (5)$$

（単位法線ベクトルがn_iの面を介して為される単位面積当りの仮想仕事）

$$\delta w_E = n_i (\sigma_{ij} \delta u_j + \mu_{ijk} \partial_j \delta u_k) \qquad (6)$$

これらの式の中，μ_{ijk}は変位の2次微分κ_{ijk}に対応する2次の応力である。(2)式の反対称部分をとると，

$$\sigma_{[ij]} + \partial_k \mu_{k[ij]} = 0 \qquad (7) \qquad \text{又は，} \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{ij} + \partial_i m_{ik} = 0 \qquad (7)'$$

が得られるが，これはモーメントの釣合式と考えることができる。（$m_{ij} = \epsilon_{jkl} \mu_{ikl}$ は偶応力）

なお，文献2)のモデルにおいては，$\mu_{kki} = 0$，$\mu_{[ij]k} = 0$，$m_{ii} = 0$ となっている。　また，一般に，境界面上においては，(6)式における$\partial_j \delta u_k$の全ての成分が境界面上のδu_iと独立でないことから

$$\partial_i \delta u_j = D_i \delta u_j + n_i D \delta u_j \ , \quad D_i = (\delta_{il} - n_i n_l) \partial_l \ , \quad D = n_l \partial_l \qquad (8)$$

のようにおいて境界条件を与える必要がある[1]。

3. 仮想仕事の原理と有限要素モデル

領域Ωに関する仮想仕事の原理は次式で与えられる。

$$\int_{\partial\Omega} \delta w_E \, da = \int_\Omega \delta w_I \, dv \quad (9) \qquad \text{ここに，} \quad \delta w_I = \frac{\partial w_I}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial w_I}{\partial \kappa_{ijk}} \delta \kappa_{ijk} \quad (10)$$

また，δw_Eについては，境界上の離散的な点に作用する集中力$\underset{\alpha}{T_i}$，エネルギー的に$\partial_i \delta u_j$に対応する2次の集中力$\underset{\alpha}{S_{ij}}$を基に計算を行うものとすれば，

$$\int_{\partial\Omega} \delta w_E \, da = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\underset{\alpha}{T_i} \, \delta \underset{\alpha}{u_i} + \underset{\alpha}{S_{ij}} \, \partial_i \delta \underset{\alpha}{u_j} \right) \qquad (11)$$

となり，これらの式より，グレイド2の材料の理論における有限要素解析は次式をもとに定式化される。

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\underset{\alpha}{T_i} \, \delta \underset{\alpha}{u_i} + \underset{\alpha}{S_{ij}} \, \partial_i \delta \underset{\alpha}{u_j} \right) = \int_\Omega \left(t_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} + \mu_{ijk} \, \delta \kappa_{ijk} \right) dv \qquad (12)$$

(12)式右辺の積分中　$t_{ij} \equiv \partial W_I / \partial \varepsilon_{ij}$ は (2)式より，$\partial_k \mu_{kij} = 0$ ではない限り，σ_{ij}とは異る。(12)式より明らかなように，グレイド2の材料の理論に基ずく有限要素解析においては，節点における変位パラメータとして，$\underset{\alpha}{u_i}$の外に$\partial_i \underset{\alpha}{u_j}$を独立な未知数として加えておく必要が生じる。なお，連続体としての方程式系においては，前節に述べたように，(8)式などにより境界条件を導びく必要が生じるが，有限要素法においては，離散点のみの変位パラメータを変数とみなすので，(6)式より直接境界条件を導くことができる。

4. 偶応力理論2次元問題の有限要素モデル

グレイド2の材料の理論には，偶応力理論が特殊な場合として含まれるが，この節では偶応力理論の有限要素解析について適用した例を示す。ここでは2次元問題を取扱った。

4−1 要素の剛性マトリックス

前節に述べたように変位パラメータとしては，各節点において $\{\ u_1,\ \partial_1 u_1,\ \partial_2 u_1,\ u_2,\ \partial_1 u_2,\ \partial_2 u_2\ \}$ の6成分を考える。節点において変位とその1次の偏微分係数を未知数におくことは，板の曲げ解析に類同である。従って，例えば，長方形要素の変位関数は次式のようにおけばよい。

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2 + \alpha_7 x_1^3 + \alpha_8 x_1^2 x_2 + \alpha_9 x_1 x_2^2 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3 \\ u_2 &= \alpha_{13} + \alpha_{14} x_1 + \alpha_{15} x_2 + \alpha_{16} x_1^2 + \alpha_{17} x_1 x_2 + \alpha_{18} x_2^2 + \alpha_{19} x_1^3 + \alpha_{20} x_1^2 x_2 + \alpha_{21} x_1 x_2^2 + \alpha_{22} x_2^3 + \alpha_{23} x_1^3 x_2 + \alpha_{24} x_1 x_2^3 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

変位関数より，要素内の節点における変位パラメータは次のように表わすことができる。

$$\{u\} = \{\ \underset{1}{u_1},\ \partial_1 \underset{1}{u_1},\ \partial_2 \underset{1}{u_1},\ \underset{1}{u_2},\ \partial_1 \underset{1}{u_2},\ \partial_2 \underset{1}{u_2},\ \cdots\cdots\ \}^T = [\ A\ ]\{\alpha\} \qquad (14)$$

偶応力理論においては $\mu_{k(ij)} = 0^*$ となるので，構成式は次のように与えられる。（*より $\sigma_{(ij)} = t_{ij}$）

$$\{\sigma\} = [\ D\ ]\{\varepsilon\} \qquad (15)$$

ここに，

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{(12)}, \mu_{1[12]}, \mu_{2[12]}\}^T \qquad (16)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \kappa_{1[12]}, \kappa_{2[12]}\}^T \qquad (17)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l^2(1-\nu) & 2l^2\eta(1-\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 2l^2\eta(1-\nu) & 2l^2(1-\nu) \end{bmatrix} \qquad (18)$$

（等方弾性体，平面応力状態の場合）

また，変位関数の微分より　$\{\varepsilon\} = [B]\{\alpha\}$　(19)

節点における力のパラメータを　$\{F\} = \{\ \underset{1}{T_1},\ \underset{1}{S_{11}},\ \underset{1}{S_{21}},\ \underset{1}{T_2},\ \underset{1}{S_{12}},\ \underset{1}{S_{22}},\ \cdots\cdots\ \}^T$　(20)

とおき，仮想仕事の原理（(12)式）を適用することにより，要素の剛性マトリックス [K] が求まる。

$$[\ K\ ] = [A^{-1}]^T \int_E [B]^T [D][B]\, dv\ [A^{-1}] \qquad (21)$$

偶応力理論の場合，節点における力のパラメータの中，$\underset{\alpha}{S}_{(ij)}$ は意味のない量であるが，グレイド2の材料の理論の一部として見た場合，この量を形式的に残しておき，荷重項として0に置けば良いものと考えられる。

4−2 全体の剛性マトリックスと境界条件

全体の剛性マトリックスを組立てる際には次の点に留意すればよい。

(1) 内部の点

節点変位のパラメータ6成分の全てを未知数とし，それに対応する節点に与えられた外力を荷重項として連立方程式を立てる。その際，もしモーメント荷重がある場合は，S_{12} 及び S_{21} に対応する行列成分の加減演算を行い，$S_{[12]}$ に対してモーメント荷重を与えればよい。また，$S_{(ij)}$ は前述のように0と置けばよい。

(2) 幾何学的な拘束のない境界上の点

未知数のとり方，外力の与え方ともに(1)と同様である。

(3) 幾何学的に拘束されている境界上の点

境界上の変位や境界に沿う方向の変位の微係数が与えられている場合には，対応する節点変位パラメータを未知数から除き，その他の変位パラメータに対しては，(1)，(2)と同様に扱えばよい。

5. あとがき

本文は2次の応力を考慮した連続体理論の有限要素解析法並びに偶応力理論に対する適用に関して述べた。偶応力理論の解析における節点未知数の扱い方は古典理論の有限要素解析にも拡張可能であると思われる。

参考文献

1) Toupin, R. A. : Arch. Rational Mech. Anal., 17, (1964) P. 85

2) 岸野佑次：「不均質材料の力学と一般化された連続体力学の対応について」昭和52年度東北支部技術研究発表会概要，(1968) P. 13