

まえがき 半無限板の境界上的一部分が回転変位を起し、その一端からクラックが発生した状態の応力解析と行なったものである。これは弾性体が面内偶力を受ける場合、その弾性体の固定支承の一端からクラックが発生した場合のモデルでもある。この問題は境界上的一部分で既知の変位が与えられ、その他の境界上は自由境界である、2次元の混合境界値問題として解かれる。解法には有理写像関数及び複素変数法を用い、解が同じ形で得られる。クラック発生前後の応力状態、クラック先端における応力拡大係数の値がクラック長さとの変位拘束部分の長さの比に対し、又、くさかりポアソン比に対して求められる。

解法 解法の詳細は文献1に譲り、その結果のみを列挙する。

図-1に示す半無限領域の境界線上にクラックと有する領域と単位円内部に等角写像する有理写像関数と次の形に作る。

$$z = \omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^{20} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E - 1 \quad (1)$$

図-1 クラックを有する半無限領域と単位円

式(1)を用いたとき、求められるべき複素応力関数の一般形は、

$$\phi(\zeta) = -\chi(\zeta) \sum_{k=1}^{20} \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} + M(\zeta) - \frac{\kappa+1}{2\pi i \kappa} \chi(\zeta) \int_a^b \frac{M(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma \quad (2)$$

ここに $\chi(\zeta)$ は Plemelj 関数で $(\zeta - \alpha)^m (\zeta - \beta)^{1-m}$ 、 κ はポアソン比を ν とすると $\kappa = 3-4\nu$ (平面ひずみ)、 $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ (平面応力) である。また $m = 0.5 - i(\ln \kappa)/2\pi$ 、 $B_k = E_k/\omega'(\zeta_k)$ 、 ζ_k は S_k の単位円に内する鏡映点、 $\bar{A}_k$ は未定定数である。関数 $M(\zeta)$ は境界条件に関するものである。今の場合図-1のED部分が変位拘束部分で、この部分が図-2に示されるような回転変位を起した場合を考える。外力境界は自由境界、変位境界では $-2G(u+i\psi) = -2Gi\varepsilon x \approx -2Gi\varepsilon \omega(\zeta)$ ($\because y \approx 0$ on ED) でありこの時関数 $M(\zeta)$ は、 $M(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b [-2Gi\varepsilon \omega(\sigma)/(\sigma - \zeta)] d\sigma$ によって与えられる。ここに G はせん断弾性係数である。最終的に式(2)は、

$$\phi(\zeta) = \chi(\zeta) \left[\frac{-2Gi\varepsilon E_0}{(1+\kappa)\chi(1)(1-\zeta)} - \frac{2Gi\varepsilon}{1+\kappa} \sum_{k=1}^{20} \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} - \sum_{k=1}^{20} \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right] + \frac{2Gi\varepsilon}{1+\kappa} \omega(\zeta) \quad (3)$$

と求められる。もう一つの複素応力関数 $\psi(\zeta)$ は、外力境界での解析接続の原理を用いて $\psi(\zeta) = -\bar{\phi}(1/\zeta) - \bar{\omega}(\zeta)\phi(\zeta)/\omega'(\zeta)$ である。変位拘束部分に作用する合モーメント R_m は、外少の変形の後 $R_m = -\text{Re} \left[\int_a^b \bar{\omega}(\zeta_k) \chi(\sigma) D(\sigma)/\sigma^2 d\sigma \right]$ より計算さ

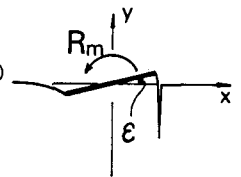


図-2 回転変位

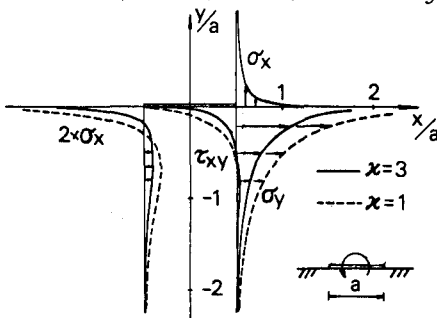
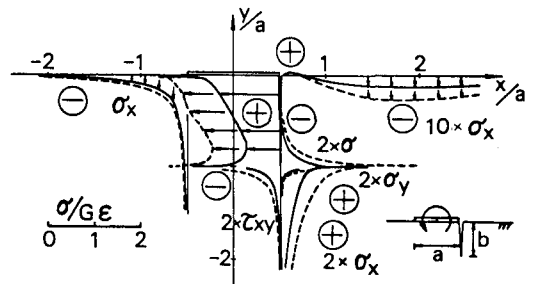


図-3 クラック発生前の応力分布(a)



クラック発生後の応力分布(b)

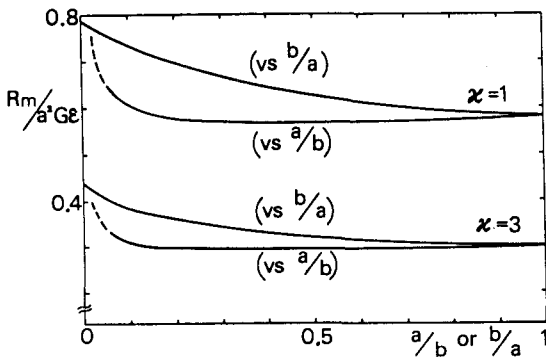


図-4 固定面上の合モーメント

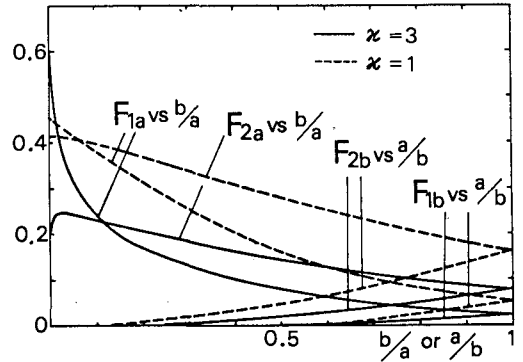


図-5 無次元化した応力拡大係数

Table 1 Resultant Moment $R_m/(a^2 Ge)$.

κ		3.0	2.5	2.0	5/3	1.0
b/a	0.0	0.441	0.487	0.549	0.605	0.785
	0.1	0.384	0.429	0.492	0.548	0.733
	0.2	0.357	0.401	0.461	0.515	0.693
	0.4	0.328	0.368	0.424	0.474	0.638
	0.6	0.312	0.351	0.404	0.451	0.607
	0.8	0.303	0.341	0.392	0.439	0.589
	1.0	0.298	0.335	0.386	0.431	0.579
a/b	0.8	0.295	0.332	0.381	0.426	0.572
	0.6	0.293	0.329	0.378	0.423	0.567
	0.4	0.292	0.329	0.378	0.422	0.567
	0.2	0.298	0.335	0.385	0.430	0.578
	0.1	0.309	0.348	0.400	0.447	0.602
	0.05	0.332	0.373	0.429	0.479	0.648

れる。関数 $D(\beta)$ は式(3)の [] 内の関数を表わす。

計算例 図-3(a)にはクラック発生前の応力分布、(b)には $b/a = 1.0$ のクラックに対する応力分布と境界上及びクラック延長線上の断面について $\kappa = 3, 1$ に対して示す。図-4, 表-1にはいくつかの κ , b/a または a/b に対して変位拘束部分の合モーメントを $R_m/(a^2 Ge)$ の値に対して示す。 $b/a = 0$ のときクラックのない場合の合モーメントを示す。原点の回りの反時計方向の向きのモーメントを正としている。 a/b の値が小さくなると変位拘束部分の長さ a と図-1の角点Dの丸味(有理写像関数のため小さな丸味がついている)の大きさが近くなり、D点が丸味の無い鋭い角点の場合と少し違って来るかもしれない。

応力拡大係数 b/a または a/b の値に対して次式で定義される無

次元化した応力拡大係数を用いる。 $F_{1a} + iF_{2a} = (K_I + iK_{II})/(Ge\sqrt{\pi a})$ ($0 \leq b/a \leq 1$), $F_{1b} + iF_{2b} = (K_I + iK_{II})/(Ge\sqrt{\pi b})$ ($0 \leq a/b \leq 1$)。 $b/a \rightarrow 0$ のとき, F_{1a}, F_{2a} の値は,

$\kappa = 1$ の場合を除いて Table 2 Nondimensional Stress Intensity Factor

無限に振動する。これは式(3)の中に $1/\chi(1) = 1/[(1-\alpha)^m(1-\beta)^m]$ が含まれ, $b/a \rightarrow 0$ のとき $\beta \rightarrow 1$ になり, m が複素数であることによる。 $\kappa = 1$ のとき $\ln \kappa = 0$ であるので, $b/a \rightarrow 0$ となっても F_{1a}, F_{2a} の値は振動しない。

参考文献

[1] N. Hasebe
Ingenieur Archiv
48, 1979

κ	3.0	2.5	2.0	5/3	1.0	3.0	2.5	2.0	5/3	1.0
b/a	F_{1a}					F_{2a}				
	10^{-5}	10^{-4}	0.001	0.01	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
0.8	0.7525	0.7786	0.6812	0.4819	0.3112	0.2376	0.1660	0.0968	0.0598	0.0376
0.6	0.8893	0.8457	0.7087	0.4989	0.3310	0.2581	0.1847	0.1099	0.0682	0.0429
0.4	0.9864	0.8784	0.7149	0.5102	0.3546	0.2849	0.2103	0.1280	0.0799	0.0503
0.2	0.9840	0.8526	0.6919	0.5099	0.3730	0.3081	0.2335	0.1447	0.0907	0.0571
0.1	0.4550	0.4549	0.4542	0.4470	0.4160	0.3789	0.3109	0.2021	0.1277	0.0802
0.05	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
a/b	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
0.8	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
0.6	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
0.4	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
0.2	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
0.1	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132
0.05	0.0193	0.0706	0.1918	0.2861	0.4133	0.0864	0.1600	0.2513	0.3191	0.4132