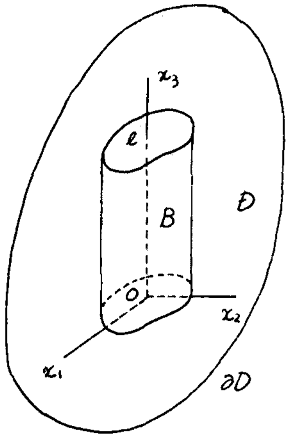
I-3　弾性体中の棒の解析

福井大学工学部　正員　福井卓雄

均質な弾性体中に埋め込まれた棒の解析は，コンクリート中の鉄筋，地盤中のくい，あるいは，ロックボルトなどの力学的な挙動を把握するために，最も基本的である。本報文は，上記の問題を解析するための一方法を提案するものである。ここで，棒は，軸変形，曲げおよびせん断変形を考慮した梁として扱った。まず，棒を含めた弾性体についての Hellinger-Reissner の定理を変形して，問題を扱い易い形の変分原理を導く。次に，棒の内部の応力分布について，いくつかの仮定をもうけ，棒を含んだ弾性体の問題を定式化する。最後にこれらの定式化をもとにして，棒の断面力を未知関数とする解法を提案する。



弾性体Dに棒Bが埋め込まれているとし，直交座標系を図のようにとる。Hellinger-Reissner の原理で用いられる汎関数は[1]

$$-\Pi_R = \int_{D+B} \{ \hat{B}(\hat{\tau}) + (\hat{\tau}_{ij,j} + b_i) u_i \} dV - \int_{\partial D_S} (T_i - \bar{T}_i) u_i dS - \int_{\partial D_u} T_i \bar{u}_i dS \qquad (1)$$

となる。ここに，u_i, b_i, $\hat{\tau}_{ij}$, T_i は，それぞれ，変位，物体力，応力，境界応力を表わす。また，

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \hat{E}^{-1}_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl}$$

である。ここに，$\hat{E}_{ijkl}$は弾性係数で，弾性体Dで E_{ijkl}，棒Bで E^B_{ijkl} である。この領域D+Bは，一様な弾性体 D+B (E_{ijkl})が，Bの部分だけ $E^*_{ijkl} = E^B_{ijkl} - E_{ijkl}$ の仮想的な棒で補剛されたものとも考えることができる。E^*_{ijkl} に対応する応力を τ^*_{ij} とすれば，D で $\hat{\tau}_{ij} = \tau_{ij}$，B で $\hat{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \tau^*_{ij}$ であり，DとBとの境界では $-\tau^*_{ij} n_j$ (n_i はBの境界 ∂B の法線ベクトル)だけの不連続が応力場 τ_{ij} に存在する。補剛部に対応する変位 u_i^* と Lagrange 乗数 g_i^* を導入すれば，式(1)は変形されて，

$$-\Pi_{mR} = \int_{D+B} \{ B(\tau) + (\tau_{ij,j} + b_i) u_i \} dV + \int_B \{ B^*(\tau^*) + \tau^*_{ij,j} u_i^* \} dV - \int_{\partial B} T_i^* u_i dS + \int_B g_i^* (u_i - u_i^*) dV - \int_{\partial D_S} (T_i - \bar{T}_i) u_i dS - \int_{\partial D_u} T_i \bar{u}_i dS \qquad (2)$$

となる。ここで，$T_i^* = \tau^*_{ij} n_j$ である。

座標軸 x_3 はBの断面の図心を通るものとして，応力 τ^*_{ij} と Lagrange 乗数 g_i^* とを

$$\tau^*_{33} = \frac{1}{A} N(x_3) + e_{3\alpha\beta} x_\beta I^{-1}_{\alpha\mu} M_\mu(x_3), \quad \tau^*_{3\alpha} = \Theta_{\alpha\beta}(x_\gamma) Q_\beta(x_3), \quad \tau_{\alpha\beta} = 0 \qquad (3)$$

$$g_3^* = \frac{1}{A} g_3(x_3) + e_{3\alpha\beta} x_\beta I^{-1}_{\alpha\mu} g_{3\mu}(x_3), \quad g_\alpha^* = \Theta_{\alpha\beta}(x_\gamma) g_\beta(x_3) \qquad (4)$$

のように仮定する。ここで，α, β などは1, 2の値をとるものとし，N, M_α, Q_α は仮想の補剛棒の軸力，曲げモーメント，せん断力である。また，AはBの断面積であり，$I_{\alpha\beta}$ は2次の断面モーメントで，

$$I_{\alpha\beta} = \int_A e_{3\alpha\lambda} e_{3\beta\mu} x_\lambda x_\mu dA, \quad \Theta_{\alpha\beta,\alpha} = - e_{3\alpha\lambda} e_{3\beta\mu} x_\alpha I^{-1}_{\lambda\mu}, \quad \Theta_{\alpha\beta} n_\alpha = 0 \ (\text{棒の周囲}) \qquad (5)$$

である。また，変位 u_i^* について，

$$u_3^\circ = \frac{1}{A}\int u_3^* dA, \quad u_{3\alpha}^\circ = \int e_{3\lambda\mu} x_\mu I_{\lambda\alpha}^{-1} u_3^* dA, \quad u_\alpha^\circ = \int \Theta_{\beta\alpha} u_\beta^* dA$$

とおくと，式(2)は

$$-\Pi_{mR} = \int_{D+B} \{ B(\tau) + (\tau_{ij,j} + b_i + g_i^*) u_i \} dV - \left[\int_A T_i^* u_i dA \right]_0^l - \int_{\partial D_s} (T_i - \bar{T}_i) u_i dS - \int_{\partial D_u} T_i \bar{u}_i dS$$
$$+ \int_0^l \Big\{ \frac{1}{2}\Big(\frac{N^2}{EA} + \frac{I_{\alpha\beta}^{-1}}{E} M_\alpha M_\beta + \frac{k_{\alpha\beta}^{-1}}{GA} Q_\alpha Q_\beta \Big) + (N_{,3} - g_3) u_3^\circ + (M_{\alpha,3} - e_{3\alpha\beta} Q_\beta - g_{3\alpha}) u_{3\alpha}^\circ$$
$$+ (Q_{\alpha,3} - g_\alpha) u_\alpha^\circ \Big\} dx_3 \qquad (6)$$

となる。ただし，E，G はそれぞれ，軸方向の Young 率とせん断弾性係数であり，$\frac{k_{\alpha\beta}^{-1}}{A} \equiv \int_A \Theta_{\lambda\alpha}\Theta_{\lambda\beta} dA$。
さらに，上式に $g_3 = N_{,3}$，$g_{3\alpha} = M_{\alpha,3} - e_{3\alpha\beta} Q_\beta$，$g_\alpha = Q_{\alpha,3}$ という関係を代入すると，

$$-\Pi_{mR} = \int_{D+B} \{ B(\tau) + (\tau_{ij,j} + b_i + g_i^*[N, M_\alpha, Q_\alpha]) u_i \} dV - \left[\int_A T_i^* u_i dA \right]_0^l$$
$$- \int_{\partial D_s} (T_i - \bar{T}_i) u_i dS - \int_{\partial D_u} T_i \bar{u}_i dS + \int_0^l \Big\{ \frac{1}{2}\Big(\frac{N^2}{EA} + \frac{I_{\alpha\beta}^{-1}}{E} M_\alpha M_\beta + \frac{k_{\alpha\beta}^{-1}}{GA} Q_\alpha Q_\beta \Big) \Big\} dx_3 \qquad (7)$$

となる。この式の停留条件は，

D において　$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = E_{ijkl}^{-1} \tau_{kl}$，　$\tau_{ij,j} + b_i + f_i^* = 0$　(8)

ここに，$f_\alpha^* = \Theta_{\alpha\beta} \{ Q_{\beta,3} - [Q_\beta]_0^l \}$

(9)

$$f_3^* = \frac{1}{A}\{ N_{,3} - [N]_0^l \} + e_{3\alpha\beta} x_\beta I_{\alpha\mu}^{-1} \{ (M_{\mu,3} - e_{3\mu\lambda} Q_\lambda) - [M_\mu]_0^l \}$$

∂D において，　$T_i = \bar{T}_i \quad (\partial D_s)$，　$u_i = \bar{u}_i \quad (\partial D_u)$

B において　$\frac{N}{EA} = \frac{1}{A}\int_A u_{3,3} dA$，　$\frac{M_\alpha}{E} = e_{3\alpha\beta} \int_A x_\beta u_{3,3} dA$

(10)

$$\frac{Q_\alpha}{GA} = k_{\alpha\beta} \Big(\int_A \Theta_{\beta\lambda} u_{\lambda,3} dA - e_{3\beta\lambda} \int_A e_{3\delta\gamma} I_{\delta\lambda}^{-1} x_\gamma u_3 dA \Big)$$

である。即ち，棒 B の周辺弾性体 D に与える効果は仮想物体力 f_i^* による効果として表され，f_i^* は仮想の補剛棒の断面力 N，M_α，Q_α で表される。
いま，与えられた問題の解が，Kelvin 解 $G_i^{(k)}(x;y) = \frac{1}{4\pi\mu}\Big\{ \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{r_{,ik}}{4(1-\nu)} \Big\}$ を用いて

$$u_i(x) = \int_{\partial D} G_i^{(k)}(x:\xi) \phi_k(\xi) dS_\xi + \int_B G_i^{(k)}(x:y) f_k^*[N, M_\alpha, Q_\alpha](y) dV_y$$

と表されるものとすれば，与えられた境界条件および式(10)により，境界 ∂D 上の未知関数 $\phi_k(y)$ および棒 B の軸上の未知関数 $N(x_3)$，$M_\alpha(x_3)$，$Q_\alpha(x_3)$ についての連立積分方程式が得られる。これを解くことにより与えられた問題の解が得られる。
ここで述べた定式化は，棒の軸力 N だけを考慮する場合には，Muki & Sternberg[2] の与えたものと同じ形になっている。

（参考文献）

(1) Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed. Pergamon, New York (1975)
(2) Muki, R. and E. Sternberg, Elastostatic Load-Transfer to a Half-Space from a Partially Embedded Axially Loaded Rod, Int. J. Solid Structures 6, 69-90 (1970)