I-1　変形理論と交番載荷された梁

長岡技術科学大学　正会員　平井　敦

1. 序言

弾性理論に於ては相対変位Sのx, y, z分素をS_x, S_y, S_zとすると所謂歪テンソルを次の如く二つに分ける。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_x}{\partial y} & \frac{\partial S_x}{\partial z} \\ \frac{\partial S_y}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial y} & \frac{\partial S_y}{\partial z} \\ \frac{\partial S_z}{\partial x} & \frac{\partial S_z}{\partial y} & \frac{\partial S_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_x}{\partial z}+\frac{\partial S_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_y}{\partial x}+\frac{\partial S_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial S_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_y}{\partial z}+\frac{\partial S_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_z}{\partial x}+\frac{\partial S_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_z}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial S_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}-\frac{\partial S_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_x}{\partial z}-\frac{\partial S_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_y}{\partial x}-\frac{\partial S_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_y}{\partial z}-\frac{\partial S_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_z}{\partial x}-\frac{\partial S_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_z}{\partial y}-\frac{\partial S_y}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1.1)$$

いま、

$$W = \frac{1}{2}\, rot\, S \quad \cdots\cdots (1.2)$$

なるベクトルWを考えると(1.1)式右辺第二項は；

$$第二項 = \begin{bmatrix} 0 & -W_z & W_y \\ W_z & 0 & -W_x \\ -W_y & W_x & 0 \end{bmatrix} \cdots (1.3)$$

A.E.H. Loveは彼の著書に於て(1.1)式の第一項に相当する変位系をpure strainと呼称し、これに属する変位はirrotational即ち $rot\, S=0$ と指摘し、P.47に於てSは

$$S(S_x, S_y, S_z) = grad\, \varphi + rot\, P \quad \cdots\cdots (1.4)$$

の形に書け、第二項に属する変位は $div\, P=0$ と指摘している。即ち第一項は筆者の言うS-1の世界、第二項はS-2の世界に相当する。しかし残念なことに彼は(1.2)式のベクトルの持つ意味に背を向けて(1.3)式を無視し(1.1)式の第一項にのみCauchy流の視線をそそぐわけである。そしてHookeの法則を仲介として次式を導く。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot div\, S + 2G\frac{\partial S_x}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right) \quad 等 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (1.5)$$

之を微小六面体の力の釣合式に代入して、

$$\rho \ddot{S} = (\lambda + 2G)\, grad\, div\, S - G\, rot\, rot\, S \cdots (1.6)$$

筆者が理解に苦しむのは(1.2)式を軽視しながら(1.6)式では$rot\, S$を存置している点である。存置しておく必要があるのならば(1.5)式の$\partial S_x/\partial x$, $\partial S_x/\partial y$等の変位Sには筆者の呼称するS-2の世界の変位が混在している疑がある。(1.5)式はpure strain即ち(1.1)式の第一項を出発点としているので(1.3)式に相当する歪が(1.5)式に入り込むことに筆者は割り切れないものを感ずる。

筆者はCauchyの導入した応力という概念を捨てて新しく変形の理論を構成しようとするものであるが、その根本の考えの一つは一般にVector場は勾配場と環流場とに分けられるということである。一例としてSなる変位Vectorは

$$\left.\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ 但し \quad rot\, S_1 &= 0,\ div\, S_2 = 0 \end{aligned}\right\} (1.7)$$

筆者は之等を夫々S-1の世界、S-2の世界と名付けている。(1.7)式はLoveの(1.4)式と同じ内容を持つものであるが彼との考えの差は、筆者が(1.2)式が重要な鍵を握っていると考える点である。

2 変形理論 Theory of Deformation

筆者はCauchyによる[σ,τ]の概念及びHookeの法則を否定し、変形Sを「場の理論」として取扱うものである。しかし理論の組立てかたが不明瞭であるとの声があるので、改めて新しい観点から御説明申上げる。

地球上にある単純梁の中央点に質量Mを載荷した場合を想像する。最初は静電場を想像する方が考え易い。梁を電媒常数εなる絶縁体とし支点に正電荷、載荷点に負電荷があると考えると梁の内部に力場R_1が考えられる。力場R_1に対し、電気量の定義と同じように思考して質量mは；

$$m = \frac{div\, \varepsilon R_1}{4\pi} \quad \cdots\cdots (2.1)$$

R_1はMと地球との間に介在するので物体内部は重力場で静電場と同じくpotential φを有し、

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= -grad\, \varphi \\ rot\, R_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (2.2)$$

等分布載荷の場合には重荷(Juka)なる概念を導入する。

$$W = \frac{\varepsilon}{4\pi}(R, n) \quad \cdots\cdots \quad (2.3)$$

nは境界面の法線方向の單位ベクトル。potential φと体積膨張 $div\, S_1$とに関し一つの仮定をおいたが筆者の理論では重要な位置を占める．Energyの消費なしとして，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{c}{\varepsilon} + \delta\right) div\, S_1 = 0 \qquad (2.4)$$

上式をtで微分し試しに $\frac{2c}{\mu}\left(\frac{c}{\varepsilon} + \delta\right) = C_1^2 \quad (2.5)$
とおき(2.2)式のdivを考慮すると

$$\ddot{\varphi} = C_1^2 \cdot \nabla^2 \varphi \qquad (2.6)$$

が成立するならば，次式を得。 $R_1 = \frac{\mu}{2c}\dot{S}_1 \quad (2.7a)$
大変奇妙な関係式であるが，(2.4)式と共に重要な関係式である．(2.1)式を更にtで微分し(2.6)の$grad$を考慮して， $\ddot{R}_1 = C_1^2 \nabla^2 R_1 \quad (2.8)$
(2.8)(2.7)式より

$$\ddot{S}_1 = C_1^2 \nabla^2 S_1 \qquad (2.9)$$

(2.2)(2.7)式より $\frac{\mu}{2c}\dot{S}_1 = -grad\, \varphi \quad (2.7b)$

このrotをとり $rot\, S_1 = 0 \quad (2.10)$

(2.4)式を仮定した段階で更に(2.7a)式を仮定しても同じ結果が得られるが，ここに説明した手法の方が比較的自然に御理解頂けるかも知れない。

梁に質量Mを載荷した後，Mと梁とが静止状態となるまでの時間はきわめて短くある時間経過すれば静的状態となる。しかしこの極めて微小な時間内に従来見過していた事象が梁の内部に生ずると筆者は想像する．それがS-2の世界である．S-1の主役がポテンシアルφならばS-2の特長は何であろうか —— それは渦若しくは磁場である．即ちCauchyが見捨てたWである。

$$W = \frac{1}{2} rot\, S_2, \quad \dot{W} = \frac{1}{2} rot\, \dot{S}_2 \cdots \quad (2.11)$$

とおくときS-2の世界を記述する式として筆者は電磁理論の次式を選んだ

$$\mu \dot{W} = -c\, rot\, R_2 \quad \cdots\cdots \quad (2.12)$$

$$\varepsilon \dot{R}_2 = c\, rot\, W \quad \cdots\cdots \quad (2.13)$$

(2.11),(2.12)式より $R_2 = -\frac{\mu}{2c}\dot{S}_2 \quad (2.14)$
(2.13)式に(2.14)式を代入すると

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = C_2^2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.15)$$

とおき次式が得られる

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{S}_2 = C_2^2 \cdot \nabla^2 S_2 \\ div\, S_2 = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.16)$$

(2.16),(2.14)式より $\left.\begin{array}{l} \ddot{R}_2 = C_2^2 \nabla^2 R_2 \\ div\, R_2 = 0 \end{array}\right\} \cdots (2.17)$

(2.13)式のrotをとり(2.12)式を考慮し又(2.11)式のdivをとることにより

$$\ddot{W} = C_2^2 \cdot \nabla^2 W, \quad div\, W = 0 \quad (2.18)$$

エネルギーの流れ$\mathfrak{G}$については既述の如く，

$$\mathfrak{G} = \frac{c}{4\pi}[R_2 \times W] \quad \cdots\cdots \quad (2.19)$$

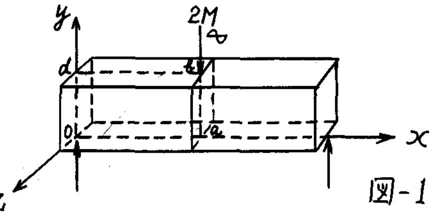

図-1

3. 交番載荷された梁

図-1の如く梁の中央に載荷した質量2Mが振動數ωで振動する場合を取扱う．支間長$2l$，梁高lとする。解を構成する基本となる楕円函數を最初に掲げる。

$$\phi = \log \frac{dn\,u + cn\,u \cdot dn\,v'}{dn\,v' - dn\,u \cdot cn\,v'} \qquad (3.1)$$

$$u = \frac{2}{\Omega}x, \quad v' = \frac{2}{\Omega}y, \quad \Omega = \frac{l}{K}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_x = \frac{2}{\Omega} \frac{sn\,u \cdot dn\,v'}{1 - cn\,u \cdot cn\,v'} \\ V_y = \frac{2}{\Omega} \frac{dn\,u \cdot sn\,v'}{1 - cn\,u \cdot cn\,v'} \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

$$\left.\begin{array}{l} H_x = \frac{2}{\Omega} \frac{k^2 sn\,u}{dn\,v' - dn\,u \cdot cn\,v'} \\ H_y = \frac{2}{\Omega} \frac{k^2 cn\,u \cdot sn\,v'}{dn\,v' - dn\,u \cdot cn\,v'} \end{array}\right\} \qquad (3.3)$$

支間長$2l$，梁高lの場合は$\Omega = 1$，$K = K'$となる．(2.6)式の解は，

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = A e^{(\omega t - mz)i} \phi \\ A = \frac{M}{\varepsilon}, \quad \omega^2 = (m C_1)^2 \end{array}\right\} \quad (3.4)$$

(2.8)より

$$\left.\begin{array}{l} R_{1x} = A e^{(\omega t - mz)i} V_x \\ R_{1y} = A e^{(\omega t - mz)i} V_y \\ R_{1z} = mi \cdot A e^{(\omega t - mz)i} \phi \end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{1x} = \frac{A}{\omega i} \frac{2c}{\mu} e^{(\omega t - mz)i} V_x \\ S_{1y} = \frac{A}{\omega i} \frac{2c}{\mu} e^{(\omega t - mz)i} V_y \\ S_{1z} = \frac{A}{C_1} \frac{2c}{\mu} e^{(\omega t - mz)i} \phi \end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{2x} = B e^{(\omega t - nz)i} H_x \\ R_{2y} = B e^{(\omega t - nz)i} H_y \\ \omega^2 = n^2 C_2^2, \quad \frac{\partial R_{2z}}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} (3.7) \qquad \begin{array}{l} W_x = -\frac{c}{\mu}\left(\frac{B}{C_2}\right) e^{(\omega t - nz)i} H_y \\ W_y = \frac{c}{\mu}\left(\frac{B}{C_2}\right) e^{(\omega t - nz)i} H_x \\ W_z = 0 \quad \cdots\cdots \quad (3.8) \end{array}$$

$\frac{A}{C_1} = \frac{B}{C_2}$ とおいて $\mathfrak{G}_z$を示すと；

57.5.5.

$$\mathfrak{G}_z = \frac{c^2}{4\pi\mu} \frac{B^2}{C_2} e^{(\omega t - nz)i} \{H_x^2 + H_y^2\} \qquad (3.9)$$