IV－154　作業管理計画システムにおける2ステージサイクリックキューモデルとその近似解法

京都大学大学院　学生員　○　井上　満千雄
京都大学工学部　正員　　　春名　攻
京都大学工学部　正員　　　吉川　和広

1. はじめに

本研究では土木工事における循環的に繰り返される作業過程を2ステージのサイクリックキューを使ってモデル化し，従来の方法とは異なった解析法によって分析することを目指している。従来，実際現象のサービス時間分布を，指数分布あるいはアーラン分布で近似し，システムが推移する状態を連立微分方程式によって定式化し，各生起状態確率を計算し，厳密解を得ていた。ここではまず初めに stage1 が指数サービス，stage2 が単位分布サービスに従う場合の解析法を説明する。またこの解析法を拡張して stage2 が一般分布サービスに従う場合の解析上の差異を示す。次にこれらとは別に積分方程式を用いて，より一般的に両 stage が一般サービスに従う場合の解析法を系内人数 $N=1$ の場合に限って述べる。

2. Stage1：窓口数 N，各窓口では同じ指数サービス
Stage2：窓口数 1，一定時間 τ の単位分布サービス，
系内人数 N の場合.

循環待ち行列現象を確率過程としてとらえ，時間経過にそってながめると，次のような2つの排反な状態が交互に生じる。

(i) 非稼働状態：N 人の客すべてが stage1 で継続してサービスを受けており，stage2 には客がいない状態。この状態にある期間を非稼働期間という。

(ii) 稼働状態：少なくとも1人の客が stage2 でサービスを受けている状態この状態にある期間を稼働期間という。

全過程を通して，非稼働，及び稼働期間長の期待値を $\overline{X'}$，$\overline{X}$ とする。Stage1 に n_1 人，stage2 に n_2 人 $=N-n_1$ いる生起状態確率を $P_r(n_1, n_2)$ とおくと，

$$\cdot\ P_r(N, 0) = \frac{\overline{X'}}{\overline{X} + \overline{X'}} \quad \text{——①}$$

$$\cdot\ 1 - P_r(N, 0) = \sum_{n_1=0}^{N-1} P_r(n_1, N-n_1) = \frac{\overline{X}}{\overline{X} + \overline{X'}} \quad \text{——②}$$

となる。Stage1 の N 個の各窓口の平均サービス時間が $\frac{1}{\mu_1}$ であることより，$\overline{X'} = \frac{1}{N} \times \frac{1}{\mu_1}$ である。ある時刻に非稼働状態であってある時間経過後，stage1 の N 人の客のうち，1人の客のサービスが終了し stage2 でサービスを受け始め稼働状態に移った時点を稼働期間の第[1]期の開始時点と考える。τ 時間経過ごとに1期間をとる。$\overline{X}$ を求めるためには n 期間（$n \times \tau$ 時間）継続して稼働状態にあり，第[$n+1$]期の期首で非稼働状態に移る確率 ${}_{[n]}P$ を求める必要がある。そこで ${}_{[n]}P$ を求める手順を以下に述べる。ただし

$$\cdot\ \sum_{n=1}^{\infty} {}_{[n]}P = 1\ ,\quad {}_{[n]}P \geqq 0 \quad \text{——③}$$

を満足する。また第[n]期の期首で stage1 に n_1 人いる状態確率を $P_{n_1}[n]$ と定義する。第[1]期及び第[2]期の期首以後では，

$$\cdot\ P_{N-1}[1] = 1 \quad \text{——④}, \qquad \sum_{n_1=0}^{N-1} P_{n_1}[n] = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} {}_{[k]}P \quad \text{——⑤}$$

が成立する。Stage1 の n_1 人のうち τ 時間に r 人のサービスが終了する確率は指数サービスに従う stage1 の窓口で b 時間内に1人の客のサービスの終了する確率 $(1-e^{-\mu_1 \tau})$ を用いると，⑥式で表わされる。

$$\cdot\ P_{n_1, r} = {}_{n_1}C_r \left(e^{-\mu_1 \tau}\right)^{n_1 - r} \left(1-e^{-\mu_1 \tau}\right)^r \quad \text{——⑥}$$

そこで一般に第[n]期の期首で stage1 に n_1 人おり，τ 時間内にそのうち r 人のサービスが終了すると，第[$n+1$]期の期首の状態確率 $P_{n_1'}[n+1]$ は ④式の初期条件のもとで ⑥式を用いると，

$$\cdot\ P_{n_1'}[n+1] = P_{n_1-r+1}[n+1] = P_{n_1}[n] \times P_{n_1, r} \quad \text{——⑦}$$

のように順次計算できる。ここで $P_N[n+1]$ は ${}_{[n]}P$ を意味しており ⑤式のように第[$n+1$]期以後の計算過程では除かれる。以上の手順を ${}_{[n]}P$ が0に収束するまで有限回（S）繰り返すことによって $\overline{X}$ は⑧式で求められる。つまり，

$$\cdot\ \overline{X} = \tau \times \sum_{n=1}^{S} n \times {}_{[n]}P \quad \text{——⑧}$$

次に $P_r(n_1, n_2)$ を求める手順を示す。Stage1 の客のサービスが τ 時間内に終了する事象は平均的に考えると，各期首より τ' 時間後に stage2 への客の移動があると考えられる。

$$\cdot\ \tau' = \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} t \cdot f_1(t)\,dt \Big/ \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f_1(t)\,dt \quad \text{——⑨}$$

$\tau' \fallingdotseq \frac{\tau}{2}$，$f_1(t)$：stage1 のサービス時間分布の密度関数

Stage1 は指数サービスに従うので τ' は n に無関係な定数である。いま，⑦式の左辺の $P_{n_1'}[n+1]$ を考える。これは第[n]期を2つに分けて，前半の $n\tau \leqq t \leqq n\tau + \tau'$ では stage1 に n_1 人いる確率 $P^{*}_{n_1}[n]$ で，$t = n\tau + \tau'$ で stage1 から stage2 に r 人の客の移動があり，後半の $n\tau + \tau' \leqq t \leqq (n+1)\tau$ では stage1 に $n_1 - r$ 人いる確率 $P^{**}_{n_1-r}[n]$ と同値である。第[$n+1$]期の期首では stage2 で1人の客のサービスが終了して stage1 の客数は n_1' $= n_1 - r + 1$ となる。稼働状態を示す状態確率和のうちで，各期に stage1 に n_1 人いる状態確率の第[S]期までの和のしめる割合を ⑩式に従ってまず計算する。

$$\cdot\ P_r'(n_1, N-n_1) = \frac{\sum_{n=1}^{S} \left(\frac{\tau'}{\tau} P^{*}_{n_1}[n] + \frac{\tau-\tau'}{\tau} P^{**}_{n_1}[n] \right)}{\sum_{n_1=0}^{N-1} \left\{ \sum_{n=1}^{S} \left(\frac{\tau'}{\tau} P^{*}_{n_1}[n] + \frac{\tau-\tau'}{\tau} P^{**}_{n_1}[n] \right) \right\}}$$

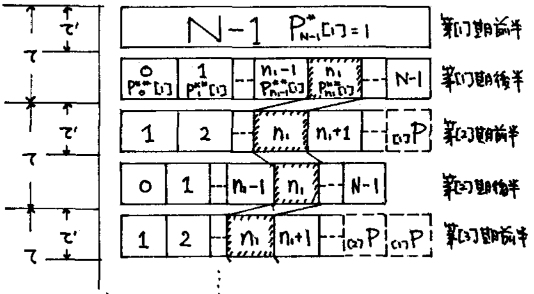
$$\text{ただし}\ \sum_{n_1=1}^{N-1} P_r'(n_1, N-n_1) = 1 \quad \text{——⑩}$$

各状態確率 $P_r(n_1, n_2)$ は全過程を通して考えると最終的に次式に従って計算できる。これらの $P_r(n_1, n_2)$ を用いて主要なシステム解析を行なうことができる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\cdot\ P_r(N,0)=\frac{\bar{X}'}{\bar{X}+\bar{X}'}\\
&\cdot\ P_r(n_1,n_2)=\frac{\bar{X}}{\bar{X}+\bar{X}'}\times P_r'(n_1,N-n_1)\\
&\cdot\ \sum_{n_1=0}^{N} P_r(n_1,N-n_1)=1
\end{aligned}
\right\}\text{——⑪}
$$

以上の関係をわかりやすく次に図示する。

・稼働時状態における Stage 1 の客数と状態確率を具体的に示したもの



3. Stage 1：窓口数 N，各窓口では同じ指数サービス
Stage 2：窓口数 1，単位サービス時間 τ，異なるサービス時間 $i\times\tau$ のサービスの生起確率 θ_i が与えられた場合　$i=1,2,\cdots,n$　$\sum\theta_i=1$　系内人数 N

2. と異なるのは Stage 2 で現にサービスを受けている客が n 期間継続してサービスを受ける生起状態を余分に考えればよい。各生起状態確率は 2. に準じて計算しうる。

4. Stage 1：窓口数 N，各窓口で同じ指数サービス
Stage 2：窓口数 1，一般サービス分布に従う場合　系内人数 N

この場合，Stage 2 のサービス時間を単位サービス時間 τ の整数倍ごとにくぎり，異なるサービス時間 $i\times\tau$ のサービスが生起する確率 θ_i が求まるように，連続型密度関数を離散型階段状の密度関数に近似する。このように Stage 2 のサービス時間分布の密度関数をおきかえると，3 と同様の手順を用いて解析することができる。単位サービス時間を短くとるに従って関数近似による状態確率の近似解の精度は高くなる。

5. Stage 1：窓口数 1，サービス時間分布の密度関数　$f_1(t)$
Stage 2：　　〃　　$f_2(t)$
共に一般分布であり，系内人数は 1 人，両 stage で待ち行列なし。

$t=0$ に 1 人の客が Stage 1 でサービスを受け始める状態を初期状態とする。$(t,t+dt)$ に Stage 1 のサービスを終了して Stage 2 に入る確率 $x(t)dt$，また Stage 2 のサービスを終了して Stage 1 に戻る確率 $y(t)dt$ を積分方程式を用いて解析する解法を示す。$(t,t+dt)$ に Stage 1 のサービスが終了する事象は次の 2 つの排反な事象に分けられる。

i：$(t,t+dt)$ で初めて Stage 1 のサービスを終了する事象。
この確率は　$f_1(t)dt$ となる。

ii：時刻 t 以前で Stage 1 で 1 回以上のサービスが終了しており，次に Stage 2 のサービスを受け，終了後再び Stage 1 のサービスを受けて，$(t,t+dt)$ でサービスを終了する確率。

この時 $(0,t)$ の途中の $(\xi,\xi+d\xi)$ に Stage 1 のサービスが終了する確率は $x(t)$ の定義より，$x(\xi)d\xi$ である。$t=t$ では Stage 1 のサービスが終了した時点から $\tau=t-\xi$ の時間が経過している。ここで $f_2(t)$ と $f_1(t)$ をたたみこんだ密度関数 $f^*(\tau)$ を計算しておくと，この客が Stage 2，および Stage 1 のサービスを $(t,t+dt)$ に終了する確率は，

$$\cdot\ x(\xi)f^*(t-\xi)d\xi\ ,\quad f^*(\tau)=\int_0^\tau f_2(\eta)f_1(\tau-\eta)d\eta \text{——⑫}$$

となる。したがって ii の生起確率は $\xi=0$ より $\xi=t$ までの積分をとって

$$\cdot\ \left\{\int_0^t x(\xi)f^*(t-\xi)d\xi\right\}dt \text{——⑬}$$

である。$x(t)dt$ は上述の排反な事象 i と ii の生起する確率和

$$\cdot\ x(t)dt=f_1(t)dt+\left\{\int_0^t x(\xi)f^*(t-\xi)d\xi\right\}dt \text{——⑭}$$

と表わせる。両辺の dt を消去すると $x(t)$ は，

$$\cdot\ x(t)=f_1(t)+\int_0^t x(\xi)f^*(t-\xi)d\xi \text{——⑮}$$

となる。ここで $f_1(t)$，$f^*(t-\xi)$ は既知であり，⑮式はボルテラ型第 2 種積分方程式である。この式を解くと $x(t)$ が求まる。次に $y(t)$ の求め方を示す。$(0,t)$ の途中の $t=\xi$，$\xi+d\xi$ で Stage 1 のサービスが終了する確率は $x(\xi)d\xi$ である。時刻 t では，Stage 1 のサービスが終了した時点から $\tau=t-\xi$ 時間が経過して Stage 2 のサービスが終了。この客が $(t,t+dt)$ に Stage 2 のサービスを終了する確率は $f_2(t)$ を用いて ⑯式のように示される。

$$\cdot\ x(\xi)f_2(t-\xi)d\xi \text{——⑯}$$

従って $y(t)$ は $\xi=0$ より $\xi=t$ までの積分をとって

$$\cdot\ y(t)=\int_0^t x(\xi)f_2(t-\xi)d\xi \text{——⑰}$$

となる。以上で $x(t)$，$y(t)$ が求まる。これより時刻 t に Stage 1，Stage 2 にいる客の数 $n_1(t)$，$n_2(t)$ は ⑱式で求まる。

$$\cdot\ n_1(t)=1-\int_0^t\{x(\eta)-y(\eta)\}d\eta,\quad n_2(t)=1-n_1(t) \text{——⑱}$$

さらに $t\to\infty$ にすると初期条件に無関係な平衡状態におけるシステムの動態を解析しうる。つまり，

$$
\left.
\begin{aligned}
&\cdot\ \lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lambda\ (\text{定数})\\
&\lim_{t\to\infty}n_1(t)=\bar{n}_1,\quad \lim_{t\to\infty}n_2(t)=\bar{n}_2,\quad \bar{n}_1+\bar{n}_2=1
\end{aligned}
\right\}\text{——⑲}
$$

6. 紙面の都合上 積分方程式を用いて解析した具体的計算結果のみを示す。
・Stage 1：$f_1(t)=te^{-t}$　$\frac{1}{\mu_1}=2$　$k=2$ のアーランサービス　窓口 1，$N=1$
・Stage 2：$f_2(t)=4te^{-2t}$　$\frac{1}{\mu_2}=1$　$k=2$ のアーランサービス　窓口 1 の場合

$$x(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos 4t-\frac{3}{8}\sin 4t\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t},\quad \lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\frac{1}{3}$$

$$n_1(t)=\frac{2}{3}-\frac{1}{8}(2t^2-2t-3)e^{-t}-\frac{1}{24}e^{-3t}$$

$$\lim_{t\to\infty}n_1(t)=\frac{2}{3}=\bar{n}_1,\quad \lim_{t\to\infty}n_2(t)=\frac{1}{3}=\bar{n}_2$$

7. おわりに

本研究の内容の詳しい説明については講演時にのべることにする。