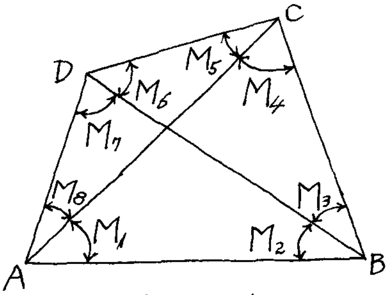
IV-88 三角測量における四辺形の角条件及辺条件の同時厳密解の Calculation Form

道都短期大学 正会員 今井芳雄

§1. 前言

A, B, C, Dの4つのStation(測点)を結ぶ四辺形ABCD(Fig. 1.1)の三角測量を考える。観測角を$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$としMの誤差補正量を$v_1 \cdot v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$とするとき, 角条件, 辺条件の両方を同時に満たす様8個のvを求めるには角, 辺の両条件をいれた連立誤差方程式を最小自乗法によって解くわけであるが、測量の都度組み立てた方程式を最初から解き出さずとも、結果に数値を代入してcalculationだけですむ様解の結果がForm化されておれば便利なわけである。筆者はこれによって便宜を受けているので発表するわけであります



Fig; 1.1

§2. 展開式

論述の順序として$\log_{10} \sin(M+\Delta M)$の展開式を求めておく。$v$を観測角Mの誤差補正量とし$\Delta M \equiv v$とおき

$\log_{10} \sin(M + v\text{秒}) = [\log_e \sin(M+v)] / \log_e 10 \cdots(2.1) = [\log_e \sin M + (\cos M/\sin M) \times v\text{秒} \times 10^{-6} \times 4.848\,\text{radian}] \div [\log_e 10] \cdots(2.2) = \log_{10} \sin M + 1/\tan M \times 10^{-6} \times 2.1054596 \times v\text{秒} \cdots(2.3) = \log_{10} \sin M + d \cdot v\text{秒} \cdots(2.4)$ ここで

$d = (1/\tan M) \times 10^{-6} \times 2.1054596 \cdots(2.5)$

§3. 角条件式 四辺形ABCD(Fig. 1.1)にある独立な三角形の三内角の和は、equal 180°でなければならぬ

$M_7 + M_8 + M_1 + M_2 = 180° \cdots(3.1)$

$M_7 + M_8 + M_6 + M_5 = 180° \cdots(3.2)$

$M_6 + M_5 + M_4 + M_3 = 180° \cdots(3.3)$

$M_6 + M_5 + M_7 + M_8 = 180° \cdots(3.4)$ ※

※ (3.1)と(3.2)式から $M_6 + M_5 = M_1 + M_2 = x \cdots(3.5)$

(3.3)と(3.4)式から $M_7 + M_8 = M_3 + M_4 = y \cdots(3.6)$

四辺形ABCDの内角の総和=360°から

$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_6 + M_5 + M_7 + M_8 = 360° \cdots(3.7)$

(3.5), (3.6)式から $2x + 2y = 360° \cdots(3.8)$ ∴ $x + y = 180° \cdots(3.9)$ ✓

✓ (3.5), (3.6)式が満されると(3.9)式から(3.1), (3.2), (3.3), (3.4)が満される。従って(3.5), (3.6), (3.7)式が角条件式である

§4. 辺条件式. $\frac{AD}{AB} \times \frac{DC}{AD} = \frac{DC}{AB} \cdots(4.1)$. $\frac{BC}{AB} \times \frac{DC}{BC} = \frac{DC}{AB} \cdots(4.2)$

∴ $\frac{\sin M_2}{\sin M_7} \times \frac{\sin M_8}{\sin M_5} = \frac{\sin M_1}{\sin M_4} \times \frac{\sin M_3}{\sin M_6} \cdots(4.3)$ ∴ $\log_{10} \sin M_1 + \log_{10} \sin M_3 + \log_{10} \sin M_5 + \log_{10} \sin M_7 - \log_{10} \sin M_2 - \log_{10} \sin M_4 - \log_{10} \sin M_6 - \log_{10} \sin M_8 = 0 \cdots(4.5)$. (4.5)式は辺条件式である

§5. 閉合差. 観測角のままで、角条件, 辺条件が満されないとき閉合差をδとすれば

$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8 - 360° = \delta_1 \cdots(5.1)$

$(M_1 + M_2) - (M_5 + M_6) = \delta_2 \cdots(5.3)$

$(M_3 + M_4) - (M_7 + M_8) = \delta_3 \cdots(5.4)$ ※

※ $\log_{10} \sin M_1 + \log_{10} \sin M_3 + \log_{10} \sin M_5 + \log_{10} \sin M_7 - \{\log_{10} \sin M_2 + \log_{10} \sin M_4 + \log_{10} \sin M_6 + \log_{10} \sin M_8\} = \delta_4 \cdots(5.5)$

となる。δの+, −の符号は閉合差の構成式の流れにのってきまるが、一旦きめたFormによって崩さないで進むことが大切である.

§6. 誤差(補正量v)の条件式.

$\phi_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + \delta_1 = 0 \cdots(6.1)$. $\phi_2 = v_1 + v_2 - v_5 - v_6 + \delta_2 = 0 \cdots(6.2)$

$\phi_3 = v_3 + v_4 - v_7 - v_8 + \delta_3 = 0 \cdots(6.3)$. $\phi_4 = d_1 \cdot v_1 + d_3 \cdot v_3 + d_5 \cdot v_5 + d_7 \cdot v_7 - (d_2 \cdot v_2 + d_4 \cdot v_4 + d_6 \cdot v_6 + d_8 \cdot v_8)$

$+\delta_4=0$ ……(6.4). 最小自乗法の原理から $f(v)=v_1^2+v_2^2+v_3^2+v_4^2+v_5^2+v_6^2+v_7^2+v_8^2=\text{minimum}$ ……(6.5). vの関数 $f(v)$ は正の数の和であるから minimum は存在しその全微分 df が equal zero であれば達成される $\therefore df=\frac{\partial f}{\partial v_1}dv_1+\frac{\partial f}{\partial v_2}dv_2+\frac{\partial f}{\partial v_3}dv_3+\frac{\partial f}{\partial v_4}dv_4+\frac{\partial f}{\partial v_5}dv_5+\frac{\partial f}{\partial v_6}dv_6+\frac{\partial f}{\partial v_7}dv_7+\frac{\partial f}{\partial v_8}dv_8=0$ ……(6.6). (6.1)より $\lambda_1\cdot d\phi_1=0$ ……(6.7). (6.2)より $\lambda_2\cdot d\phi_2=0$ ……(6.8). (6.3)より $\lambda_3\cdot d\phi_3=0$ ……(6.9). (6.4)より $\lambda_4\cdot d\phi_4=0$ ……(6.10). ここで $\lambda_1\cdot\lambda_2,\lambda_3\cdot\lambda_4$ …… Lagrange Multiplier, $d\phi_1.\ d\phi_2.\ d\phi_3.\ d\phi_4$ は $\phi_1\cdot\phi_2,\ \phi_3,\ \phi_4$ の全微分で直ちに equal zero が云える.

§7. 誤差方程式の編成　$df+\lambda_1\cdot d\phi_1+\lambda_2 d\phi_2+\lambda_3 d\phi_3+\lambda_4 d\phi_4=0$ であるから. λの介入によって dv をとり去ることが出来て次の誤差方程式が得られる.

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_1}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_1}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_1}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_1}=0 \quad\cdots(7.1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_2}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_2}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_2}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_2}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_2}=0 \quad\cdots(7.2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_3}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_3}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_3}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_3}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_3}=0 \quad\cdots(7.3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_4}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_4}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_4}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_4}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_4}=0 \quad\cdots(7.4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_5}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_5}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_5}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_5}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_5}=0 \quad\cdots(7.5)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_6}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_6}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_6}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_6}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_6}=0 \quad\cdots(7.6)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_7}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_7}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_7}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_7}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_7}=0 \quad\cdots(7.7)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_8}+\lambda_1\frac{\partial\phi_1}{\partial v_8}+\lambda_2\frac{\partial\phi_2}{\partial v_8}+\lambda_3\frac{\partial\phi_3}{\partial v_8}+\lambda_4\frac{\partial\phi_4}{\partial v_8}=0 \quad\cdots(7.8)$$

§8. 誤差方程式の解の形　(7.1)……(7.8)式の偏微分を実行しこれに(6.1), (6.2), (6.3), (6.4)式の v を用いると $\lambda_1\cdot\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ の連立方程式が得られる. これを解いて λ_4の form を得た. この λ_4の Form は四辺形については共通であるから2度と微分方程式を立てるに及ばない

$$\lambda_4=\left\{\frac{1}{4}(d_1-d_2+d_3-d_4+d_5-d_6+d_7-d_8)\times\delta_1+\frac{1}{2}(d_1-d_2-d_5+d_6)\times\delta_2+\frac{1}{2}(d_3-d_4-d_7+d_8)\times\delta_3-2\times\delta_4\right\}\div\left[\frac{1}{8}(d_1-d_2+d_3-d_4+d_5-d_6+d_7-d_8)^2+\frac{1}{4}(d_1-d_2-d_5+d_6)^2+\frac{1}{4}(d_3-d_4-d_7+d_8)^2-(d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2+d_6^2+d_7^2+d_8^2)\right]\cdots(8.1)$$

$\lambda_1=\frac{1}{8}\{(-)\lambda_4(d_1-d_2+d_3-d_4+d_5-d_6+d_7-d_8)-(-)2\delta_1\}$ ……(8.2). $\lambda_2=\frac{1}{4}\{(-)\lambda_4(d_1-d_2-d_5+d_6)-(-)2\delta_2\}$ ……(8.3). $\lambda_3=\frac{1}{4}\{(-)\lambda_4(d_3-d_4-d_7+d_8)-(-)2\delta_3\}$ ……(8.4) 従って $v_1=\frac{1}{2}\{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_4\cdot d_1\}$ ……(8.5). $v_2=\frac{1}{2}\{-\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4\cdot d_2\}$ ……(8.6). $v_3=\frac{1}{2}\times\{-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_4\cdot d_3\}$ ……(8.7). $v_4=\frac{1}{2}\{-\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4\cdot d_4\}$ ……(8.8) $v_5=\frac{1}{2}\{-\lambda_1+\lambda_2-\lambda_4\cdot d_5\}$ ……(8.9). $v_6=\frac{1}{2}\{-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4\cdot d_6\}$ ……(8.10). $v_7=\frac{1}{2}\{-\lambda_1+\lambda_3-\lambda_4\cdot d_7\}$ ……(8.11) $v_8=\frac{1}{2}\{-\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4\cdot d_8\}$ ……(8.12). 以上によって厳密解の補正量 v は求まった.

§9. 計算例　Fig. 1.1 において $M_1=42°01'12.15''$. $M_2=38°22'19.10''$. $M_3=38°28'34.9''$. $M_4=61°07'52''$. $M_5=30°57'07.1''$. $M_6=49°26'21.85''$. $M=70°21'59.20''$. $M_8=29°14'32.85''$ が与えられたとき $\delta_1=-0.85''$ $\delta_2=2.3''$ $\delta_3=-5.15''$ $\delta_4=10^{-6}\times5$ となる. $d_1=10^{-6}\times2.33674$. $d_2=10^{-6}\times2.6591$. $d_3=10^{-6}\times2.6492$ $d_4=10^{-6}\times1.16079$. $d_5=10^{-6}\times3.51074$. $d_6=10^{-6}\times1.8021$. $d_7=10^{-6}\times0.75111$ $d_8=10^{-6}\times3.7608$. 然るとき (8.1)式に直接代入して $\lambda_4=10^{6}\times0.529874''$ である. 補正量 v は $v_1=-1.22683''$. $v_2=0.09675''$. $v_3=0.9853''$. $v_4=1.9947''$ $v_5=-0.11883''$ $v_6=1.2887''$. $v_7=-1.6826''$ $v_8=-0.4873''$ となる これらの補正量 v は (6.1), (6.2). (6.3). (6.4) の条件式を厳密に満足している. 秒の小数第2位に止めて補正値とする.

§10. 結言　筆者の得た厳密解の calculation Form は先ず λ_4 を calculation form にまとめた事から出発する。通常四辺形の調整は近似解で1つの角の補正について2回の調整の合算とするが. 筆者の Form はごく機械的操作でそれぞれ1回の calculation ですむわけで観測角の角番号さえ一致させておけば事足りる。大いに利用の広まることを期待するわけであります (1978. 2. 22)