# Ⅳ-87　閉合トラバースにおける閉合誤差と面積誤差との関係

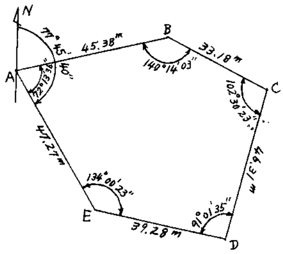
愛知工業大学　正会員　根橋直人

## 1. まえがき

従来，トラバース測量では，閉合誤差を用い，精度は閉合比$\left(=\frac{閉合誤差}{総辺長}\right)$で表わす。併し，これは距離的表示であるため，今回之と面積誤差との関係を求めようとして，実測例を使って計算し，検討してみた。

## 2. 各種調整法による経・緯距値の比較

図－1の五角形ABCDEにおいて，図中に示した値は〔例1〕の場合の実測値である。(但し内角は調整ずみの値)，調整法には，一般にコンパス及びトランシット法則(簡易法)があり，又現在余り使われない君島法則(最小自乗法の理論により辺角の誤差を同時に調整する合理的方法)と厳密解(春日屋方式にして，君島法より更に適用性の広い，もっとも厳密な解法)とがあり，それをすべて用いた。ここに〔例1〕は角辺の精度極高，〔例2〕は角は同じで辺やゝ低，〔例3〕は角は同じで辺極低の場合を用いた。結果は下表のとおりである。




図－1

表－1　〔例1〕

| 測線 | 調整前 | | | | 調整後 | | | | | | | | | | | | | | | | 閉合誤差(E)と閉合比(R) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 緯距 | | 経距 | | 緯距 | | | | | | | | 経距 | | | | | | | | |
| | | | | | コンパス法則 | | トランシット法則 | | 君島法則 | | 厳密解 | | コンパス法則 | | トランシット法則 | | 君島法則 | | 厳密解 | | |
| | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | |
| A～B | 9.62 | | 44.35 | | 9.62 | | 9.62 | | (コンパス法則と同じ) | | (コンパス法則と同じ) | | 44.35 | | 44.34 | | (コンパス法則と同じ) | | (コンパス法則と同じ) | | |
| B～C | | 15.33 | 29.42 | | | 15.33 | | 15.33 | | | | | 29.42 | | 29.42 | | | | | | $E=\sqrt{(0.01)^2+(0.01)^2}$ |
| C～D | | 44.73 | | 12.00 | | 44.73 | | 44.72 | | | | | | 12.00 | | 12.00 | | | | | $=0.01$ |
| D～E | 9.50 | | | 38.11 | 9.50 | | 9.50 | | | | | | | 38.11 | | 38.11 | | | | | |
| E～A | 40.93 | | | 23.65 | 40.94 | | 40.93 | | | | | | | 23.66 | | 23.65 | | | | | $R=\frac{0.01}{211.42}\doteqdot\frac{1}{21100}$ |
| 計 | 60.05 | 60.06 | 73.77 | 73.76 | 60.06 | 60.06 | 60.05 | 60.05 | | | | | 73.77 | 73.77 | 73.76 | 73.76 | | | | | |

$E_L=-0.01$　$E_D=+0.01$

表－2　〔例2〕

| 測線 | 調整前 | | | | 調整後 | | | | | | | | | | | | | | | | 閉合誤差(E)と閉合比(R) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 緯距 | | 経距 | | 緯距 | | | | | | | | 経距 | | | | | | | | |
| | | | | | コンパス法則 | | トランシット法則 | | 君島法則 | | 厳密解 | | コンパス法則 | | トランシット法則 | | 君島法則 | | 厳密解 | | |
| | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | |
| A～B | 9.62 | | 44.36 | | 9.63 | | 9.62 | | 9.62 | | 9.62 | | 44.35 | | 44.34 | | 44.35 | | 44.34 | | |
| B～C | | 15.33 | 29.41 | | | 15.33 | | 15.32 | | 15.32 | | 15.32 | 29.40 | | 29.40 | | 29.39 | | 29.40 | | $E=\sqrt{(-0.04)^2+(0.05)^2}$ |
| C～D | | 44.75 | | 12.01 | | 44.74 | | 44.73 | | 44.74 | | 44.74 | | 12.02 | | 12.01 | | 12.00 | | 12.01 | $=0.06$ |
| D～E | 9.48 | | | 38.06 | 9.49 | | 9.48 | | 9.49 | | 9.49 | | | 38.07 | | 38.07 | | 38.08 | | 38.07 | |
| E～A | 40.94 | | | 23.65 | 40.95 | | 40.95 | | 40.95 | | 40.95 | | | 23.66 | | 23.66 | | 23.66 | | 23.66 | $R=\frac{0.06}{211.39}\doteqdot\frac{1}{3500}$ |
| 計 | 60.04 | 60.08 | 73.77 | 73.72 | 60.07 | 60.07 | 60.05 | 60.05 | 60.06 | 60.06 | 60.06 | 60.06 | 73.75 | 73.75 | 73.74 | 73.74 | 73.74 | 73.74 | 73.74 | 73.74 | |

$E_L=-0.04$　$E_D=+0.05$

表－3　〔例3〕

| 測線 | 調整前 | | | | 調整後 | | | | | | | | | | | | | | | | 閉合誤差(E)と閉合比(R) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 緯距 | | 経距 | | 緯距 | | | | | | | | 経距 | | | | | | | | |
| | | | | | コンパス法則 | | トランシット法則 | | 君島法則 | | 厳密解 | | コンパス法則 | | トランシット法則 | | 君島法則 | | 厳密解 | | |
| | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | + | − | |
| A～B | 9.62 | | 44.36 | | 9.63 | | 9.62 | | 9.61 | | 9.61 | | 44.34 | | 44.32 | | 44.32 | | 44.32 | | |
| B～C | | 15.33 | 29.41 | | | 15.32 | | 15.32 | | 15.32 | | 15.32 | 29.39 | | 29.39 | | 29.39 | | 29.39 | | $E=\sqrt{(-0.05)^2+(0.12)^2}$ |
| C～D | | 44.75 | | 12.01 | | 44.74 | | 44.73 | | 44.75 | | 44.74 | | 12.04 | | 12.02 | | 12.01 | | 12.02 | $=0.13$ |
| D～E | 9.47 | | | 37.99 | 9.48 | | 9.47 | | 9.48 | | 9.48 | | | 38.01 | | 38.02 | | 38.03 | | 38.03 | |
| E～A | 40.94 | | | 23.65 | 40.95 | | 40.96 | | 40.98 | | 40.97 | | | 23.68 | | 23.67 | | 23.67 | | 23.66 | $R=\frac{0.13}{211.32}\doteqdot\frac{1}{1600}$ |
| 計 | 60.03 | 60.08 | 73.77 | 73.65 | 60.06 | 60.06 | 60.05 | 60.05 | 60.07 | 60.07 | 60.06 | 60.06 | 73.73 | 73.73 | 73.71 | 73.71 | 73.71 | 73.71 | 73.71 | 73.71 | |

$E_L=-0.05$　$E_D=+0.12$

従来閉合比(R)の制限値は，(1)市街地…$\frac{1}{5000}\sim\frac{1}{20000}$ (2)平地及び路線…$\frac{1}{3000}\sim\frac{1}{5000}$，(3)山地…$\frac{1}{1000}$と決められ，上記をこれらと照合すれば，〔例1〕は規定(1)に該当し，各法共殆んど一致し法則別の精度の差異なし，〔例2〕は(2)に該当し，簡易法に少しずれがあるが先ず問題なし，〔例3〕は(3)に該当し，これ位誤差があってもコンパス法則がずれる程度でやはり各種の優劣差はつけ難い。この原因は，本例の角の精度極高(内角全体で誤差－40")によると思えるが，簡易法で充分信頼性があることもうかがえた，若し角誤差が大きく，又辺数が多い場合は，厳密法の効力が顕現してくるものと推測される。今回そこまで及ばなかったことは残念である。ただし春日屋方式において"基準長"の取り方に考慮を払わないと，調整が完全に行なわれないことに注意すべきである。

## 3. 倍横距法(D.M.D法)による面積算出値

表-4　〔例1〕

| 種別 | 面積($m^2$) | 面積誤差($m^2$) | 精度 |
|---|---|---|---|
| コンパス法則 | 2833.31 | 0 | 0 |
| トランシット法則 | 2832.49 | −0.82 | 1/3500 |
| 君島法則 | 2833.31 | 0 | 0 |
| 厳密解 | 2833.31 | (基準) | (基準) |

表-5　〔例2〕

| 種別 | 面積($m^2$) | 面積誤差($m^2$) | 精度 |
|---|---|---|---|
| コンパス法則 | 2832.77 | 0.70 | 1/4100 |
| トランシット法則 | 2831.82 | −0.25 | 1/11300 |
| 君島法則 | 2832.27 | 0.20 | 1/14200 |
| 厳密解 | 2832.07 | (基準) | (基準) |

表-6　〔例3〕

| 種別 | 面積($m^2$) | 面積誤差($m^2$) | 精度 |
|---|---|---|---|
| コンパス法則 | 2830.76 | −0.06 | 1/47400 |
| トランシット法則 | 2830.21 | −0.62 | 1/4600 |
| 君島法則 | 2831.30 | 0.48 | 1/5900 |
| 厳密解 | 2830.82 | (基準) | (基準) |

之によると，どの例でも面積値における種別の差異は明白に現れず，[例1]は殆んど一致し，[例2]は簡易，厳密法の順に順当な精度が出，[例3]もほぼ良いがコンパス法則が極良だつたのは偶然の一致と思われる。又例別の実測精度の順と面積精度の順も合致した。併しこの結果からははつきり優劣差はつけられなかつた。今各例の閉合比(R)と面積精度(P)の関係を図-5に示したが，全く判定出来ない。経・緯距値が近似し過ぎているのに依るのだろう。

## 4. 図形的解析法(三角形に分割し，三角法計算で面積誤差等も求める方法)

図-2のように，3つの三角形に別け，各三角形において，辺と角の中等誤差Δl(0.5cm，1.0cm，…)，Δα(20″，1′，…)を与えて，三角形の公式により面積，対辺及びそれらの誤差を求める。即ち

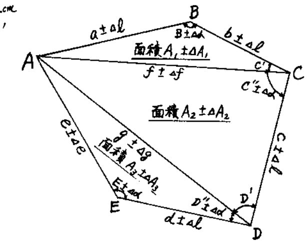



図-2

△ABCの面積 $A_1=\frac{1}{2}ab\sin B$　∴中等誤差 $\Delta A_1=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial A_1}{\partial a}\cdot\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial A_1}{\partial b}\cdot\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial A_1}{\partial B}\cdot\frac{\Delta B}{\rho}\right)^2}$　(誤差伝播の法則)

対辺の長さ $f=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos B}$　∴　〃　$\Delta f=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial b}\cdot\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial B}\cdot\frac{\Delta B}{\rho}\right)^2}$　(　〃　)

最後にそれらを総合して五角形の値を求める。即ち

全面積 $A=A_1+A_2+A_3$，　中等誤差 $\Delta A=\pm\sqrt{(\Delta A_1)^2+(\Delta A_2)^2+(\Delta A_3)^2}$　(誤差伝播の法則)となる。

(但し問題点として，三角形の頂角C′，C″，D″等のΔ値をどう取るか，迷つたが結局最大限Δαそのままを用いた。かくして求めたΔl，Δαの各値と面積誤差(延いては面積精度P)の関係は図-3，4のとおりである。

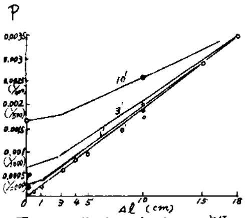



図-3. 辺誤差(Δl)と面積精度(P)との関係

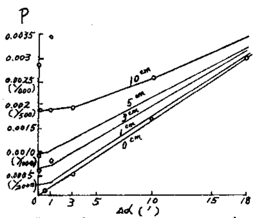



図-4. 角誤差(Δα)と面積精度(P)との関係

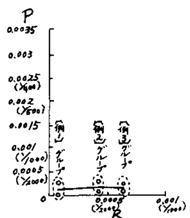



図-5. 実例の閉合比(R)と面積精度(P)との関係

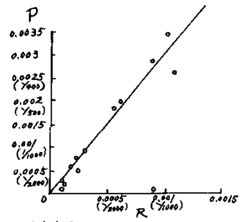



図-6. 図形解析の閉合比(R)と面積精度(P)との関係

両図共，ほぼ直線関係に近く，相関々係の強いことは判明し，Δα=1′位，Δl=1cm〜3cm位の精密な範囲で直線が折れるらしいのは，面積上からもこの辺までが無難な範囲であろうか。何れにしても未だ閉合誤差Eが求められていないから，標題の要求にも應えられないので，Eの値を推算してみる。最後の辺eについて，計算より求めたΔeは長さのずれ，$(e\times\frac{\Delta\alpha}{\rho})$は角によるずれと考え，両者の和$\sqrt{(\Delta e)^2+(e\times\frac{\Delta\alpha}{\rho})^2}$をもってEとした。このE(即ち精度ではR)と面積誤差Pとの関係は図-6のとおりである。直線関係に近く，R：P≒1：3を得た。数学上では，或る多角形の辺と面積の相対誤差の比は1：2であるが，当例との差は角の誤差が加わるから当然と思える。

以上，厳密性には欠けるが，両者の関係の目安程度は得られたと信ずる。

尚今回の計算から，学生実習における最初の段階では，角では2分(故に全内角では5〜6分)辺長では2cm位までの誤差は容認し得ると推定した。面積誤差にして1/2000近くだろうから。

## 5. あとがき

今後，厳密な面積計算を行なうためには，春日屋方式の如く，方位角を基準として角，辺の誤差を扱かい，結局経・緯距値の変化を掴み，D.M.D法より求めるべきだと考えている。


参考文献　春日屋伸昌：「測量実務叢書2 トラバース測量」P149〜164，森北出版