IV-36　　利用者最適配分に関する一考察

信州大学大学院　学生員　○衛門久明
信州大学工学部　正員　　奥谷巌

1、はじめに

交通量配分理論の最も一般的で利用者にとっても合理的とされているものとして等時間原則配分理論がある。これをゲーム理論的に見ると，非協力n人ゲームのNashの平衡点と一致することはよく知られたことである。そして，非協力n人ゲームに於けるPrisoner's dilemmaに相当するものが等時間原則配分にも存在することがわかっている。所謂，Braessのパラドックスがこれにあたる。本研究はこのようなパラドックスが起こらずかつ，利用者にとって最適な配分を求めようとするものであり，特に単一のODの場合についてこの特徴を考察する。

2、一般的な考え方とその定式化

ネットワークを通過する運転者は走行により自分がこうむる非効用（この場合走行時間）をできるだけ小さくしようとして行動するが，何んらかの制御を行なうことにより，すべての運転者が各々こうむる非効用を等時間原則配分の場合より小さくすることも可能になる。これは，配分問題を協力ゲームとして解くことに対応するが，そのことについては文献1)で述べた。今回はこの問題を数理計画問題として定式化することを試みた。即ち，

最少化問題 P　$Z_i \to \min_{x, Z}$　(1)　　ここに，$i \in M$ ：ネットワークの全ODの集合

subj. to
$$\begin{cases} \sum_{j \in I_i} x_i^j = Q_i & (2) \\ x_i^j \geqq 0 & (3) \\ x_i^j (f_i^j - Z_i) \leqq 0 & (4) \end{cases}$$

$j \in I_i$ ：第iODのルートの集合
x_i^j ：第iOD第jルート交通量
Z_i ：第iODの最大走行時間を示すパラメータ

f_i^j ：第iOD第jルート走行時間関数，xの単調増加ベクトル関数　，　Q_i：第iOD交通量

これは明らかに各ODについての最大走行時間最少化の問題であるが，ODの数だけの多目的計画問題となるので一般に解は一意的に決まらない。また，等時間原則配分の解がこの計画問題の解であるとは限らない。

3、単一ODについての利用者最適配分の等時間性とその解の存在

単一ODの場合には，最少化問題Pは次のようになり，この解が利用者最適配分となる。

（最少化問題 P_1　$Z \to \min_{x, Z}$　(1)'　　$x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$
subj. to　$\sum_{i \in I} x_i = Q$　(2)'，　$x_i \geqq 0$　(3)'，　$x_i (f_i - Z) \leqq 0$　(4)'　　$i \in I$ ：ルートの集合）

ここで，f_iを単調増加で連続微分可能な凸関数とし，$f_i(0) > 0$　($i \in I$) とすれば，このP_1の最適解のうちのひとつは$x_i > 0$となるすべてのiについて，$f_i = Z$となる。つまり，流れているルートについては走行時間がすべて等しくなる利用者最適配分が少くともひとつは存在する。但し，流れていないルートの所要時間がそれより長くなるとは限らない。

以下，これを証明する。P_1の最適解のひとつをx^0とする。集合Jを次のように定義すると，x^0は最少化問題P_1'の最適解でもある。　　$J = \{ i \mid x_i^0 > 0,\ i \in I \}$

（最少化問題 P_1'　$t \to \min_{x, t}$　(5)
subj. to　$\sum_{i \in J} x_i \geqq Q$　(6)，　$x_i \geqq 0$　(7)，　$f_i - t \leqq 0$　(8)　$i \in J$）

但し，$i \in I - J$ のiについては$x_i = 0$ の定数とする。

最少化問題P_1'はx^0についてSlaterの制約想定を満足するので，x^0にはKuhn-Tucker定理の最適解の必要条件から，

$$-\lambda_{1i} + \sum_{i \in J} \lambda_{2i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \lambda_3 = 0 \quad (9), \quad 1 - \sum_{i \in J} \lambda_{2i} = 0 \quad (10), \quad \lambda_{1i} \cdot x_i^0 = 0 \quad (11)$$

$$\lambda_{2i} \cdot (f_i - t_{x^0}) = 0 \quad (12), \quad \lambda_3 \cdot \left(\sum_{i \in J} x_i - Q\right) = 0 \quad (13), \quad \lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_3 \geqq 0 \quad (14) \quad i, j \in J$$

を満たすλ_1，λ_2，λ_3が存在する。今，定義より$x^0 > 0$であるから，$\lambda_1 = 0$，従って(9)は次のようになる，

$$\sum_{i \in J} \lambda_{2i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \lambda_3 = 0 \quad (15)$$

ここで，$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ を (j, i) 要素とする行列 A_{x^0} を考え，(15)をマトリクス表示すると，

$$A_{x^0}\lambda_2 - \mathbb{1}\cdot\lambda_3 = 0 \qquad (16) \qquad \mathbb{1}=(1,1,\cdots,1)^T$$

今ここで，$\lambda_2 > 0$ となる λ_2 が存在すれば，(12)より $f_i = t_{x^0}$ $(i\in J)$ が成立つ。そして次のことがTuckerの二者択一の定理より云える。

1) $\lambda_2>0$ が存在すれば，$A_{x^0}^T\cdot dx \leqq 0$ (17)，$\mathbb{1}^T\cdot dx = 0$ (18) を満たす dx は存在しない。
2) $\lambda_2>0$ が存在しなければ，(17),(18)を満たす dx は存在する。

(17),(18)を各要素についてみれば次のようになる。

$$\sum_{i\in J}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i = \nabla f_j\cdot dx \leqq 0$$ （但し，少くともひとつ <0 となる $j\in J$ がある）(17)'，$\sum_{i\in J} dx_i = 0$ (18)'

これは許容領域内に他の最適解が存在することを意味している。つまり，$\lambda_2>0$ が存在すれば f_i の最適解は一意的に決まり，かつ流れているルートの走行時間はすべて等しくなる。また一方，$\lambda_2>0$ が存在しなければ(17),(18)を満足する dx が存在し，$x^1 = x^0 + dx > 0$ も P_i' の最適解であり，同時に P_i の最適解でもある。そして，次式が成立つことは明らかである。

$$\exists i, j\in J \qquad f_i(x^1) = f_i(x^0) = t_{x^0}, \qquad f_j(x^1) < f_j(x^0) \leqq t_{x^0} \qquad (19)$$

最初の式は x^0, x^1 が共に最適解であることから，二番目の式は(17)'より明らかである。以下，2)の場合のみについて考察すればよい。x^1 についても(9)〜(14)を満たす $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が存在するが，$\lambda_1 = 0$ であり，$\lambda_2>0$ は満足しない。従って前と同様に(17),(18)を満足する dx が存在し，$x^2 = x^1 + dx > 0$ とすれば x^1 と同じことが云える。以下，$x^k > 0$ の条件のもとでこの操作を繰返してゆけば，常に(17),(18)が成立つので少くともひとつの i について f_i の値が小さくなり他はすべて等しくなるような微少変化 dx が存在するが，$f_i(0)>0$ より，$k\to\infty$ で x^k はある正のベクトルに収束する。そのベクトルを $\hat{x}$ とすると，$\hat{x}$ に関して(17),(18),$\hat{x}+dx>0$ を満足する dx は存在しない。しかし，明らかに $\lambda_2>0$ は存在していないから，(17),(18)のみを満たす dx は存在している。従ってこの dx については $\hat{x}+dx>0$ を満たしていない。今，ε を正の微少な数とすると，$\hat{x}+\varepsilon dx>0$ をも満足していないので，$\varepsilon\to 0$ とすれば，$\hat{x}>0$ が成立していないことになる。つまり，収束した解 $\hat{x}$ の要素のうちには少くともひとつは0のものがある。

次に，集合 $J'=\{i \mid \hat{x}_i>0, i\in J\}$ と定義し，J' を J のかわりに P_i' に適用する。このとき J' の補集合では $\hat{x}_i$ が0となり，J' の要素のみでの配分となる。$\hat{x}$ は J' についての P_i' の最適解でもあり，今までと同様の議論を展開できる。そして，$\lambda_2>0$ を判定することにより，流れているルートの走行時間が等しくなる配分が存在するかどうか見られる。もし，$\lambda_2>0$ が存在しないなら，J' と同様に $J''\subset J'\subset J$ を定義できる。このように集合を少しずつ小さくしてゆけば，集合 $J^{(n)}$ は有限回で $\lambda_2>0$ の存在をみるか，又は $J^{(n)}=\{i\}$ つまりひとつのルートのみからなる集合にまで減少する。前者の場合は明らかであるが，後者の場合についても流れているルートはひとつとなるから，流れているルートの走行時間がすべて等しくなる配分が存在することが証明された。

走行時間関数 f_i について設けた仮定は現実的なものであり，この解の性質は一般性があると云える。また，実際に P_i を計算するにしても線型等式制約を含んだ凸計画問題になるので解くのは比較的容易であると思われる。

4、あとがき

本稿では単一ODの場合の解の特徴をみたが，実際問題として複数ODについてはPareto最適解が存在するので問題は複雑になってくる。従って，Pareto最適解のうちから新たに合理的な判断規準を設けて最適解を選定してゆく手法が必要となる。また，非効用として走行時間のみを取扱ったが，実際にはその他の多くの要素を考える必要がある。そのような場合にも，f_i が凸で微分可能であるなら比較的簡単に応用されうるであろう。

5、参考文献

1）衛門，奥谷「交通量配分問題のゲーム理論的解釈」 S.52年度中部支部研究発表会講演概要集 S.53
2）O.L.マンガサリアン 「非線形計画法」 培風館 S.47