# III－266　トンネル非定常湧水解析

九州大学工学部　正員　○樗木　武
同　上　〃　楊　勲　得

**1. 緒言**　トンネル非定常湧水問題の解析手法の確立に当っては種々の内容手法が考えられるが，本研究では現実のトンネル地山のもつ複雑な透水特性および境界条件を適切に評価でき，しかも演算効力の点ですぐれた解析手法を提案することを目的として，定常湧水問題に対して開発した著者らの還元有限要素法[1)~3)]の拡張応用を企図するものである。

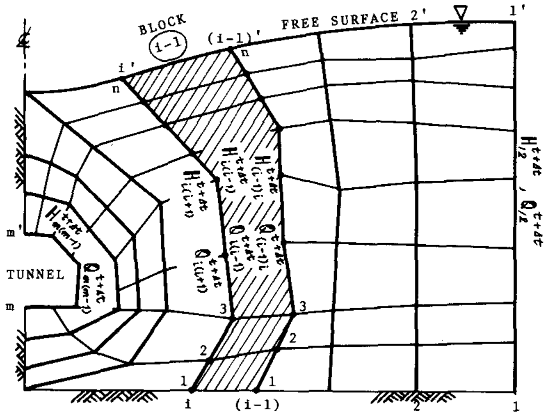
**2. 解析理論**　非定常湧水問題のFEM基礎式は周知のように次式で与えられる。

$$-KH + Q - (E+F)\,\partial H/\partial t - J\,\partial u/\partial t = 0 \qquad (1)$$

ここに，$H, u, Q$：解析領域内節点の水頭，流速，流量ベクトル，$K$：透水性マトリックス，$E$：透水層，地下水の圧縮性マトリックス，$F$：自由水面変化の項で，自由水面上に一辺を有する要素毎に $\tilde{f}$ を求め，集積したもの，$J$：加速度の項における係数マトリックスで

$$\tilde{f} = \frac{\gamma(x_k - x_j)}{6}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

透水係数，要素節点の座標値を内容とする。



図－1

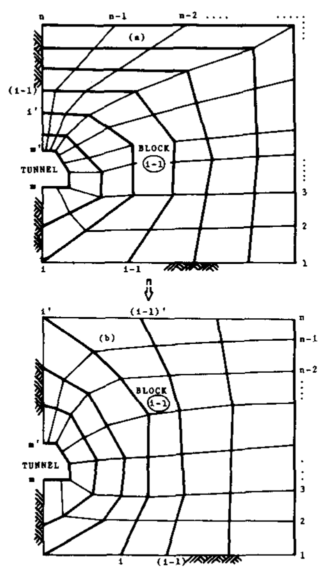
ところで，解析領域を，図-1に示すように，相対する固定境界間でブロック分割し，さらに，各ブロック毎に四辺形または三角形要素に分割するものとする。このとき，ブロック線$(i-1)-(i-1)'$，$i-i'$ ではさまれるブロック$(i-1)$を取り出し，その両端ブロック線上の節点1, 2, …, nにおける節点水頭，流量のベクトルを$(H_{(i-1)i}, Q_{(i-1)i})$，$(H_{i(i-1)}, Q_{i(i-1)})$と記号表示すれば，式(1)より次式が与えられる。ただし，式(1)左辺第4項は省略した。

$$\begin{Bmatrix}Q_{(i-1)i}\\-Q_{i(i-1)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{(i-1)(i-1)}&k_{(i-1)i}\\k_{i(i-1)}&k_{ii}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}H_{(i-1)i}\\H_{i(i-1)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-R_{(i-1)i}\\R_{i(i-1)}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}(e+f)_{(i-1)(i-1)}&(e+f)_{(i-1)i}\\(e+f)_{i(i-1)}&(e+f)_{ii}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}(\partial H/\partial t)_{(i-1)i}\\(\partial H/\partial t)_{i(i-1)}\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ここに，$R_{(i-1)i}, R_{i(i-1)}$：式(1)左辺第2項を，ブロック線を介して伝えられる節点流量と，それ以外の境界節点流量に分けたものの後者である。

時間に関する離散化のため，Crank-Nicolson法を適用し，式(2)を $t+\alpha\Delta t$（ただし，$0\leqq\alpha\leqq1$）にて求めれば次のとおりである。

$$\begin{Bmatrix}\alpha Q^{t+\Delta t}_{(i-1)i}+(1-\alpha)Q^{t}_{(i-1)i}\\-\alpha Q^{t+\Delta t}_{i(i-1)}-(1-\alpha)Q^{t}_{i(i-1)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{(i-1)(i-1)}&k_{(i-1)i}\\k_{i(i-1)}&k_{ii}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha H^{t+\Delta t}_{(i-1)i}+(1-\alpha)H^{t}_{(i-1)i}\\\alpha H^{t+\Delta t}_{i(i-1)}+(1-\alpha)H^{t}_{i(i-1)}\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}(e+f)_{(i-1)(i-1)}&(e+f)_{(i-1)i}\\(e+f)_{i(i-1)}&(e+f)_{ii}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t+\Delta t}_{(i-1)i}+(1-\alpha)\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t}_{(i-1)i}\\\alpha\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t+\Delta t}_{i(i-1)}+(1-\alpha)\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t}_{i(i-1)}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-\alpha R^{t+\Delta t}_{(i-1)i}-(1-\alpha)R^{t}_{(i-1)i}\\\alpha R^{t+\Delta t}_{i(i-1)}+(1-\alpha)R^{t}_{i(i-1)}\end{Bmatrix} \qquad (3)$$



図－2

ここに，$k, e, f$ は時刻$t+\alpha\Delta t$における解析領域に対して求められるものである。

他方，時刻$t+\Delta t$と$t$におけるポテンシャル$H$に関して次式を仮定する。

$$H^{t+\Delta t}=H^{t}+\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t}\Delta t-\alpha\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t+\Delta t}-\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)^{t}\right\}\Delta t \qquad (4)$$

式(4)を式(3)に代入のうえ演算整理すれば　$V^{t+\Delta t}_{i(i-1)} = P_{(i-1)i}V^{t+\Delta t}_{(i-1)i} + \tilde{V}^{t}_{(i-1)0}$　(5)

ここに，

$$P_{(i-1)i}=\begin{bmatrix}-a^{-1}_{(i-1)i}a_{(i-1)(i-1)} & \alpha\, a^{-1}_{(i-1)i}\\-\frac{1}{\alpha}\left(a_{ii}a^{-1}_{(i-1)i}a_{(i-1)(i-1)}-a_{i(i-1)}\right) & -a_{ii}a^{-1}_{(i-1)i}\end{bmatrix},\quad C_{(i-1)i}=\begin{bmatrix}a^{-1}_{(i-1)i} & {}_{n}O_{n}\\-\frac{1}{\alpha}a_{ii}a^{-1}_{(i-1)i} & \frac{1}{\alpha}{}_{n}I_{n}\end{bmatrix},\quad V=\begin{Bmatrix}H\\Q\end{Bmatrix}$$ （状態ベクトル）

$\tilde{V}^{t}_{(i-1)0}=A_{(i-1)i}V^{t}_{i(i-1)}+B_{(i-1)i}V^{t}_{(i-1)i}+C_{(i-1)i}\Lambda^{t}_{(i-1)i}$，　${}_{n}I_{n}, {}_{n}O_{n}$：$(n\times n)$次の単位および零マトリックス，

$$A_{(i-1)i}=\begin{bmatrix} -a^{-1}_{(i-1)i}\,b_{(i-1)i} & {}_nO_n \\ \frac{1}{\alpha}\left(a_{ii}\,a^{-1}_{(i-1)i}\,b_{(i-1)i}-b_{ii}\right) & \left(1-\frac{1}{\alpha}\right){}_nI_n \end{bmatrix}$$

$$B_{(i-1)i}=\begin{bmatrix} -a^{-1}_{(i-1)i}\,b_{(i-1)(i-1)} & (1-\alpha)\,a^{-1}_{(i-1)i} \\ \frac{1}{\alpha}\left(a_{ii}\,a^{-1}_{(i-1)i}\,b_{(i-1)(i-1)}-b_{i(i-1)}\right) & \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)a_{ii}\,a^{-1}_{(i-1)i} \end{bmatrix}$$

$$a_{IJ}=\alpha k_{IJ}+(e+f)_{IJ}/\Delta t,\quad b_{IJ}=(1-\alpha)k_{IJ}-(e+f)_{IJ}/\Delta t,$$

$$\Lambda^{t}_{(i-1)i}=\begin{Bmatrix} -\alpha R^{t+\Delta t}_{(i-1)i}-(1-\alpha)R^{t}_{(i-1)i} \\ \alpha R^{t+\Delta t}_{i(i-1)}+(1-\alpha)R^{t}_{i(i-1)} \end{Bmatrix}$$

式(5)は，ブロック$(i-1)$において，時刻$t+\Delta t$におけるブロック線$i-i'$, $(i-1)-(i-1)'$における両状態ベクトルの関係を示すもので，非定常湧水問題の格間式である。

次に，ブロック線$i-i'$に着目する。任意の時刻で，ブロック線両側のブロック側面における節点水頭および節点流量を考察すれば，ポテンシャルの一意性より$H^{t+\Delta t}_{i(i-1)}=H^{t+\Delta t}_{i(i+1)}$が成立し，また，収支から$Q^{t+\Delta t}_{i(i-1)}=-Q^{t+\Delta t}_{i(i+1)}$が成立する。したがって，状態ベクトルに関して$V^{t+\Delta t}_{i(i-1)}=V^{t+\Delta t}_{i(i+1)}$なる等式がえられ，これを式(5)に代入すれば次の伝達式がえられることになる。

$$V^{t+\Delta t}_{i(i+1)}=\Gamma_{(i-1)i}V^{t+\Delta t}_{(i-1)i}+V^{t}_{(i-1)0} \qquad (6)$$

ここに，$V^{t}_{(i-1)0}=A_{(i-1)i}V^{t}_{i(i+1)}+B_{(i-1)i}V^{t}_{(i-1)i}+C_{(i-1)i}\Lambda^{t}_{(i-1)i}$

ブロック線1-1', m-m'においてあたえられる固定境界条件は次のとおりである。

$$1\text{-}1':\ V^{t+\Delta t}_{12}=B^{t+\Delta t}_{LH}\begin{Bmatrix} Q^{t+\Delta t}_{12} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

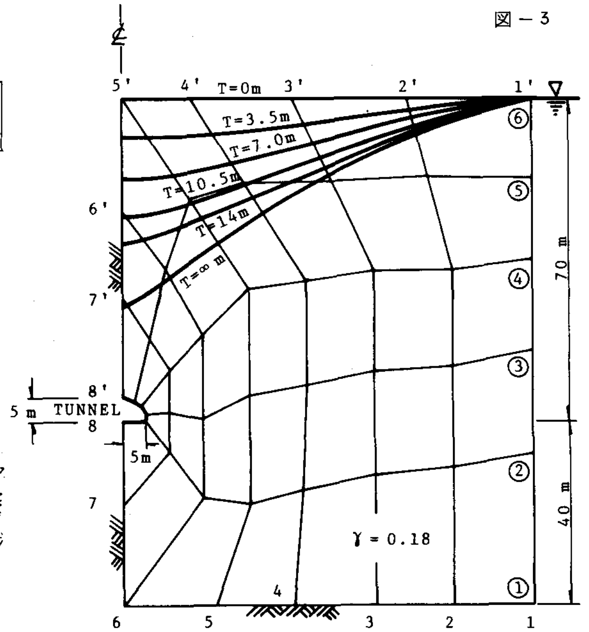
$$m\text{-}m':\ B_{RH}V^{t+\Delta t}_{m(m-1)}=H^{t+\Delta t}_{R} \qquad (8)$$

**3. 解析手順**　ブロック線1-1'の側から相隣るブロック毎に式(6)の伝達式を求め，その第1式から順次前進的に代入を繰り返せば，各ブロック線上の状態ベクトルがいずれも$V_{12}^{t+\Delta t}$の関数として求められる。これらの式において，下流端ブロック$(m-1)$の上流端面に関する状態ベクトル$V^{t+\Delta t}_{(m-1)m}$をブロック$(m-1)$の格間式に代入し，その結果を式(8)に代入するとともに，$V_{12}^{t+\Delta t}$に関して式(7)を用いれば，$Q_{12}^{t+\Delta t}$を未知とする本題の基本連立方程式が導定され次のとおりである。

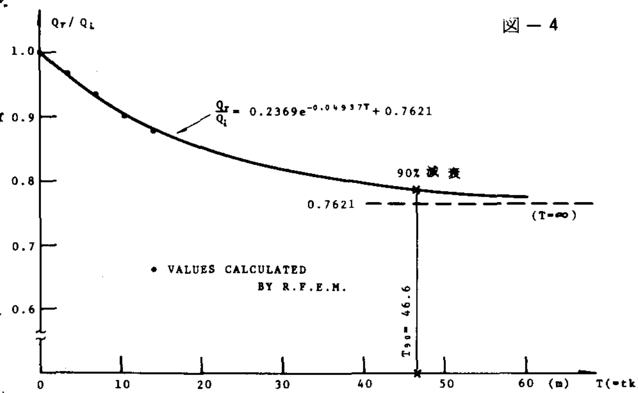
$$B_{RH}\Gamma_0 B^{t+\Delta t}_{LH}\begin{Bmatrix} Q^{t+\Delta t}_{12} \\ 1 \end{Bmatrix}+B_{RH}\left(+\Gamma_1V^{t}_{10}+\Gamma_2V^{t}_{20}+\cdots+V^{t}_{(m-1)0}\right)=H^{t+\Delta t}_{R}\quad \left(ここに,\ \Gamma_I=\Gamma_{(m-1)m}\Gamma_{(m-2)(m-1)}\cdots\Gamma_{(I+1)(I+2)}\right) \qquad (9)$$

ところで，$\Gamma_I$の計算に当っては，$k, e, f$を求めねばならないが，これらは時刻$t+\alpha\Delta t$における解析領域に対して算出されるものである。しかるに，この解析領域は当初未知であるから，式(9)は予測子修正子法による反復計算になる。また，本題の解析に当っては，初期状態$t=0$の計算と，それ以降の各時間段階の計算とで分割法が異なる。すなわち，$t=0$では一種の被圧湧水問題であり図-2(a)の分割内容になる。しかし，$t\neq 0$では自由水面の水頭は未知量として基本式中に含められるから図-2(b)の分割内容になり，この分割の切り換えに伴う新節点のポテンシャル，節点流量を算出するよう工夫せねばならない。

**4. 適用例**　図-3に示す湧水問題に対して，本法を適用し，自由水面の時間的変化をプロットすれば同図実太線に示すとおりである。また，図-4は湧水量の減衰状況を示したもので，90%減衰完了時を湧水平衡時間と定義する。



図－3



図－4


(参考文献) (1) CHISHAKI, T. and S.D. YANG: Two-Dimentional Analysis of Unconfined Groundwater Flow from a Tunnel Opening, Memories of the Facul. of Eng., Kyushu Univ., Vol.37, No.1, 1977,　(2) 樗木，楊：遷移有限要素法によるダム浸透流問題の解析，大ダム，No.80, 1977, pp.73~82,　(3) 樗木：トンネル力学，共立出版，1977, pp.243~281