III－206　積分方程式法と有限要素法の融合解析法の地盤工学への適用

大阪大学　正員　伊藤冨雄
大阪大学　正員　久武勝保
大阪大学大学院　学生員○長山喜則

1　まえがき

近年，有限要素法（ＦＥＭ）が地盤工学の各種の問題に適用され，数多くの実績をあげている。これは，ＦＥＭが，形状が任意で不均質な地盤を，その非線形性，弾塑性等を考慮して解析できる等の長所を持っているからである。しかしＦＥＭは，有限な地盤しか解析できず，計算機の容量上の制約もあって，無限領域を有する地盤への適用には限界がある。他方，積分方程式法（ＩＥＭ）は，地山の不均質性や非線形性の定式化が困難であり，また隅角部で計算精度が低下する等の短所がある反面，無限地盤を扱うことができるという長所を持っている。本研究は，ＦＥＭとＩＥＭとを融合することによって，ＦＥＭの長所を保持しつつ無限地盤の解析を可能とすることを目的とするものである。

2　定式化

任意の初期応力をもつ無限地盤中に，任意形状の空洞を掘削する場合，空洞周辺を有限要素に分割し(D_f)，その外側を積分方程式法で扱う領域(D_i)とする。両領域はＬ上の節点で連続している（Fig. 1）。全節点に対してＦＥＭによって　$\mathbf{f}=\mathbb{K}\mathbf{u}$（1）が成立する。ここに$\mathbf{f}$は節点力ベクトル，$\mathbf{u}$は節点変位ベクトル，$\mathbb{K}$はＦＥＭの全体剛性マトリクスである。この$\mathbf{f}$は既知量である外力ベクトル$\mathbf{f}_*$と，Ｌ上で$D_i$から$D_f$に作用する未知の応力ベクトル$\mathbf{f}_0$とに分けられる。すなわち，　$\mathbf{f}=\mathbf{f}_*+\mathbf{f}_0$（2）。ここに$\mathbf{f}_0$はＬ上以外では0であるので，　$\mathbf{f}_0=\{\mathbf{0},\ \overline{\mathbf{f}}_0\}$（3）と書ける。この$\overline{\mathbf{f}}_0$はＬ上で$D_i$から$D_f$に作用している節点力ベクトルである。同様に$\mathbf{u}$も，Ｌ以外で0である$\mathbf{u}_0$と，Ｌ上で0である$\mathbf{u}_*$とに分けると，　$\mathbf{u}=\mathbf{u}_*+\mathbf{u}_0$（4），また，　$\mathbf{u}_0=\{\mathbf{0},\ \overline{\mathbf{u}}_0\}$（5）とすれば，Ｌの補助境界($L^*$)を多角形で近似し，その辺上で密度$\varphi$が一定であると仮定して，積分方程式を連立一次方程式に置き換えると，　$-\overline{\mathbf{f}}_0=\overline{\mathbb{K}}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}}_0$（6），$\overline{\mathbf{u}}_0=\overline{\mathbb{B}}\,\overline{\boldsymbol{\varphi}}_0$（7）が成立する[1),2)]。ここに$\overline{\boldsymbol{\varphi}}_0$は密度，$\overline{\mathbb{K}}$，$\overline{\mathbb{B}}$はそれぞれ応力及び変位に対する弾性方程式の基本特異解に関するマトリクスである。（6），（7）式より$\overline{\boldsymbol{\varphi}}_0$を消去して，

$-\overline{\mathbf{f}}_0=\overline{\mathbb{K}}_0\overline{\mathbf{u}}_0$（8）を得る。ここに　$\overline{\mathbb{K}}_0=\overline{\mathbb{K}}\,\overline{\mathbb{B}}^{-1}$（9）である。$D_f$における節点数と対応さすために$\overline{\mathbb{K}}_0$を拡大して，　$\mathbb{K}_0=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \\ & \overline{\mathbb{K}}_0\end{bmatrix}$（10）とすると，

$-\mathbf{f}_0=\mathbb{K}_0\mathbf{u}$（11）となる。よって（1），（11）式を（2）式に代入して，　$\mathbb{K}\mathbf{u}+\mathbb{K}_0\mathbf{u}=\mathbf{f}_*$（12），すなわち，　$\mathbf{u}=\{\mathbb{K}+\mathbb{K}_0\}^{-1}\mathbf{f}_*$（13）を得る。これより任意点の変位及び応力が求められる。

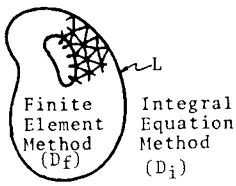

Fig. 1

3　数値計算例及び考察

数値計算の精度の検討のために，理論解が容易に得られる場合，すなわち，等方な初期応力Ｐが作用する無限地盤中に，円形空洞を掘削する場合（Fig. 2）を解析する。空洞の半径をa，Ｌを空洞と同心円とし，その半径をｂとする。b/aを３種類に変えて解析を行い，また比較のために，Ｌで固定支持とし，要素数を同じとした場合について，ＦＥＭのみを用いた解析も行った。解析は全て平面歪状態の

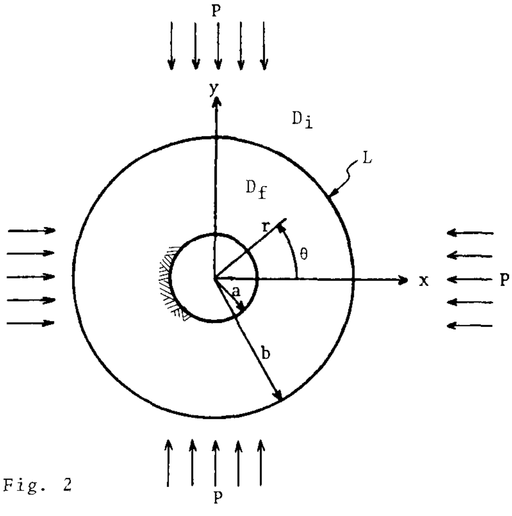

Fig. 2

下に，線形弾性問題とした。地盤のヤング率をE，ポアソン比をν(=0.3)とし，各節点の円孔中心から放射方向の変位u_rと，円孔中心から節点までの距離rとの関係を，それぞれ無次元量で示したのがFig. 3である。また，応力の無次元量σ_r/p，σ_θ/pをr/aに対して示したのがFig. 4a（新解法），Fig. 4b（FEM）である。以上の図によって，FEMとIEMとが精度よく結合されていることが分る。またFEMのみの場合ではその精度が，b/aの変化に大きく依存しているのに対して，本解析の精度は，b/aの影響をあまり受けない。以上の解析は，孔とLとが同心円で，初期応力も静水圧的であるので，計算誤差がある程度相殺されることも考えられるので，次に初期応力が水平方向のみである場合について，本解析法で計算した結果をFig. 5に示す。

4 結論

有限要素法と積分方程式法とを融合することによって，FEMの長所を保持したまま，無限地盤の解析が可能となった。これによって地盤の解析が，計算機の容量の制約からかなり解放されることとなろう。

参考文献

1) Kupradze, V.D.; Potential Methods in the Theory of Elasticity, 1965. 2) 丹羽・小林・横田；積分方程式による任意形状，多数空洞周辺応力の解析，土木学会論文報告集第195号，1971年11月.

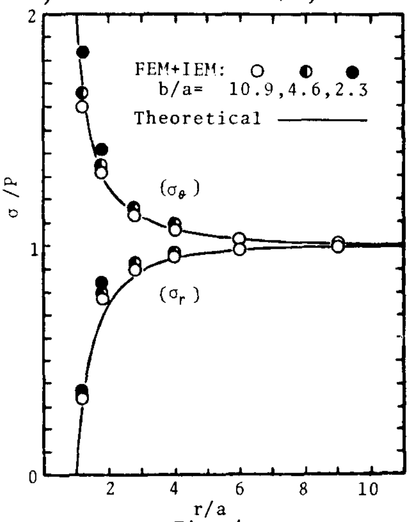

Fig. 4a

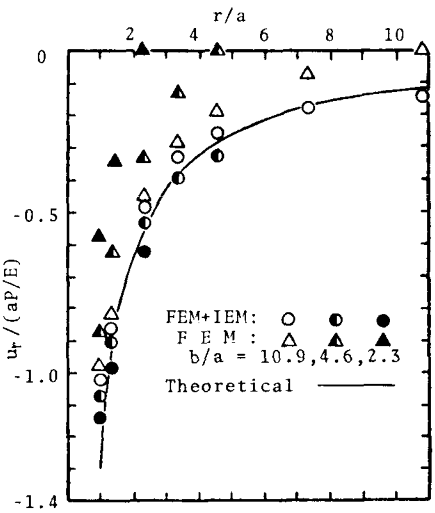

Fig. 3

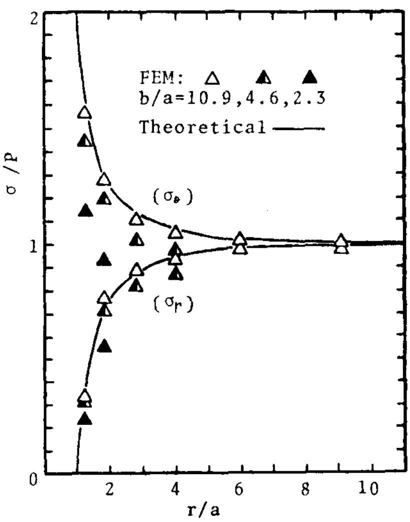

Fig. 4b

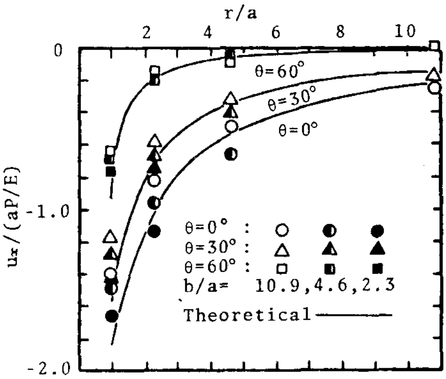

Fig. 5