III-64 MODIFIED HARDIN-DRNEVICHモデルについて

電力中央研究所 ○国生剛治 桜井彰雄

まえがき 土の動的な非線形物性モデルとしては(i) Bi-linear, (ii) Ramberg-Osgood, (iii) Hardin-Drnevich が良く用いられる。このうち(i)と(ii)は応力・ひずみ面上のヒステリシス曲線が明瞭に定められているのに対して，(iii)は骨格曲線は定式化されているがヒステリシスについては特定の形が与えられていない。一方，歴史的に見ると(i)(ii)のモデルは上部構造物の非線形振動を模擬することを主目的として発展してきたのに対し，Hardin-Drnevichモデルは土の静的な応力・ひずみ関係を双曲線の式で近似したKondner式を延長し，動的な土の物性試験値に基いて提案されたものである。それだけ他のモデルに比べて土への適用性が高く，また定数の物理的な意味も明らかである。Hardin-Drnevichモデルが他のモデルより不備な点はそのヒステリシスループが定式化されていないために理論的な減衰特性が定められないことである。Hardinらはその代りとしてヒステリシスループの形に2つの制限を課することにより等価減衰比とひずみの関係式を導いており，一応完結したモデルとなっているが，土の動的な応答を時間軸でstep by stepに追跡するためには，土のヒステリシス曲線を定めておくことが是非必要である。

HARDIN-DRNEVICHモデルの拡張 Hardin-Drnevichモデルにおけるせん断応力τとせん断ひずみγの関係は骨格曲線について

$$\tau = \frac{G_{max}\gamma}{1+(\gamma/\gamma_r)} \quad (1)$$

と表わされる。ここにG_{max}は骨格曲線の初期勾配，γ_rは図.1のようにして求められるひずみで非線形度を示すパラメーターである。式(1)より等価(割線)せん断剛性Gは

$$G/G_{max} = 1/(1+(\gamma/\gamma_r)) \quad (2)$$

となり，図.2の破線で示される。また限界減衰比hは最大値h_{max}に対して $h/h_{max} = (\gamma/\gamma_r)/(1+(\gamma/\gamma_r))$ (3)

と表わされる。このモデルに新たにヒステリシス曲線を付け加えるに当り，JenningsがRamberg-Osgoodモデルで行なったと同様に骨格曲線を2倍に相似拡大して原点を折り返し点A, B(図.1)まで移動する方法をとった。この場合A, B点での折り返し勾配がG_{max}になること，A, B点でヒステリシスから骨格曲線への勾配が連続であることが特長である。BDAは

$$\tau - \tau_m = G_{max}(\gamma-\gamma_m)/(1-(\gamma-\gamma_m)/2\gamma_r) \quad (4)$$

と表わされ，曲線ACBは

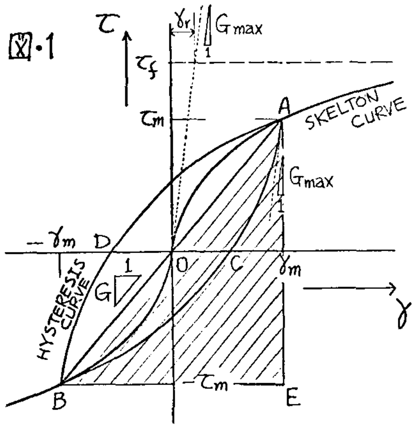
$$\tau + \tau_m = G_{max}(\gamma+\gamma_m)/(1+(\gamma+\gamma_m)/2\gamma_r) \quad (5)$$

となる。このヒステリシスループの等価限界減衰比hを求めるために1周期中のロスエネルギーΔWを計算すると

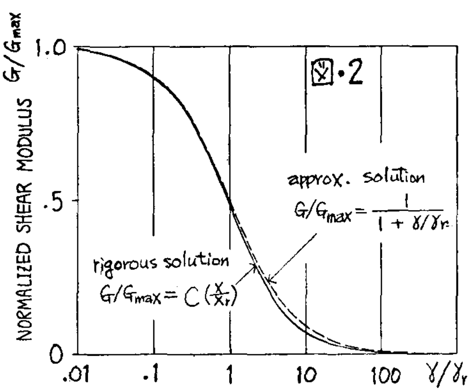
$$\Delta W = \oint \tau\, d\gamma = \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \tau(\text{式}.4)\, d\gamma + \int_{\gamma_m}^{-\gamma_m} \tau(\text{式}.5)\, d\gamma = \frac{8}{\pi}\left[G_{max}\gamma_r\left\{\gamma_m - \gamma_r \ln\left(1+\frac{\gamma_m}{\gamma_r}\right)\right\} - \frac{1}{2}G\gamma_m^2\right] \quad (6)$$

1周期中の弾性エネルギーWは$\triangle ABE$の面積であるから $W = 2G\gamma_m^2$ (7)

であるから一般に承認されている等価減衰比を求める方法により次式が得られる。



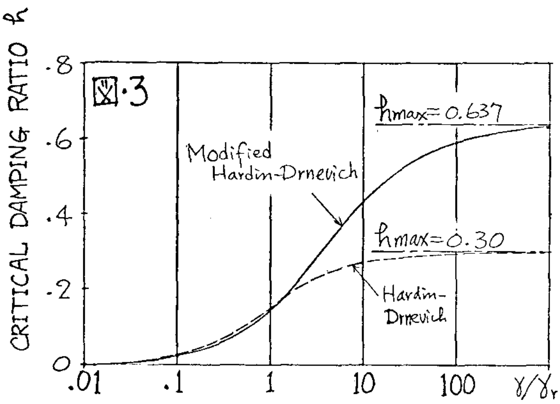
図・1



図・2

$$h=\frac{1}{\pi}\frac{\Delta W}{W}=\frac{4}{\pi}\left[\frac{G_{max}}{G}\left[\frac{\gamma_r}{\gamma_m}-\left(\frac{\gamma_r}{\gamma_m}\right)^2\ln\left(1+\frac{\gamma_m}{\gamma_r}\right)\right]-\frac{1}{2}\right] \quad (8)$$

この式で(G_{max}/G)は式(2)から求められるからγ/γ_rの値だけからG_{max}によらず減衰比が定められる。γ_mが無限小の時は$h=0$，$\gamma_m/\gamma_r\rightarrow\infty$の時には$h=2/\pi\fallingdotseq0.637$になる。Hardinらにより提案された式(3)と式(8)を比較したのが図·3である。Hardinらの実験に基き式(3)において$h_{max}\fallingdotseq0.3$とすると式(8)と式(3)は$\gamma/\gamma_r<2$の範囲では良く一致しているが，それ以上のひずみに対しては(8)式は非常に大きな減衰能を与えることになる。他のモデル（Elastic-Perfect Plastic, Ramberg-Osgood）でも$\gamma\rightarrow\infty$の時は$h=2/\pi$となりHardinらの結果と異なることは注意を要する。



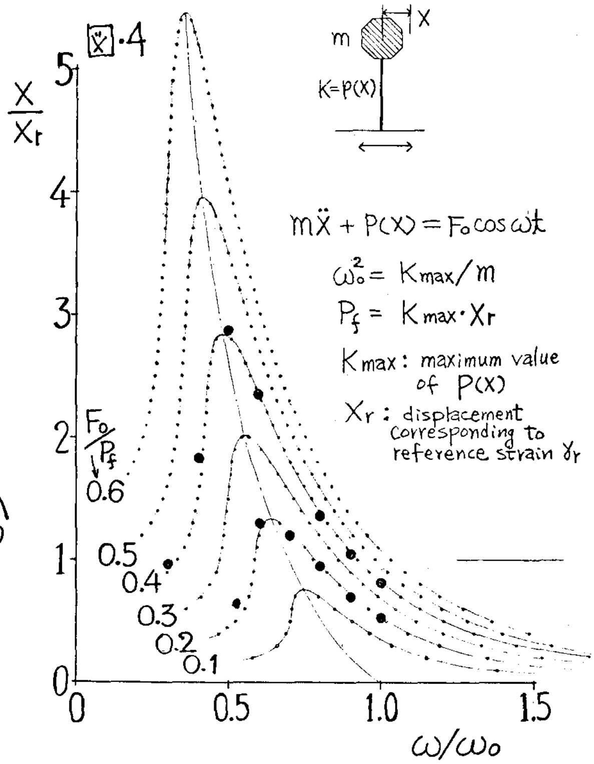
次にここで提案されたModified H·Dモデルを復元力特性として持つ1質点振動の定常応答解をCaugheyやJenningsが(i)(ii)モデルに適用したKryloff, Bogoliuboffの方法により解く。質量mの質点が$P(X)$のヒステリシスバネにより支持されており，バネ固定点から$F_0\cos\omega t$の力が加わると考える（図·4）。紙面の都合で途中の計算は割愛するが最終的に次式が得られる。

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2=\frac{G}{G_{max}}=C\left(\frac{X}{X_r}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{F_0}{P_f}\right)^2\left(\frac{X_r}{X}\right)^2-\left[S\left(\frac{X}{X_r}\right)\right]^2} \quad (9)$$

ただし

$$C\left(\frac{X}{X_r}\right)=\frac{1}{\pi P_f}\frac{X_r}{X}\int_0^{2\pi}P\left(\frac{X}{X_r}\cos\theta\right)\cos\theta\,d\theta \quad (10)$$

$$S\left(\frac{X}{X_r}\right)=\frac{1}{\pi P_f}\frac{X_r}{X}\int_0^{2\pi}P\left(\frac{X}{X_r}\cos\theta\right)\sin\theta\,d\theta \quad (11)$$



共振点は式(9)の平方根が零の場合であるから

$$G/G_{max}=C\left(\frac{X}{X_r}\right) \quad (12)$$

が得られ，式(10)について数値積分を行なうことにより$G/G_{max}\sim X/X_r(=\gamma/\gamma_r)$の関係が図·2の実線のように得られる。近似値である破線と比べると(2)式がほぼ正しい等価せん断剛性であることがわかる。図4は式(9)を数値計算して求めた共振曲線である。外力レベルF_0/P_fが大きくなるに従い共振点が低下することがわかる。図中の黒丸は同じ1質点系をβ法により直接時間軸で積分した解であるが(9)式の結果と比較的良く一致している。なお本モデルのもう一つの長所はBi-linearモデルと異なり常に解が安定であることである。

本研究に当り当所渡辺啓行氏より貴重な助言をいただいたことを感謝します。また理科大修士鈴村順一氏に計算の助力を得たことを感謝します。

文献 • Hardin, B.O, Drnevich, V.P. "Shear Modulus and Damping in Soils" I & II Tech. Report Univ. of Kentucky. (1970) • Caughey, T.K. "Sinusoidal Excitation of a System with Bi-linear Hysteresis" Journ. of App. Mech. Vol 27, No.4 (1960), • Jennings, P.C. "Periodic Re…" Joun. ASCE. EM2 (1964)