III-60　球の圧密における固有値と固有関数

京都大学 工学部　田村　武

1. はじめに

飽和粘土の多次元圧密はBiotの方程式に支配される。　とくに粘土の構造骨格を線形弾性体と仮定すれば，つりあい条件より変位成分を消去して(過剰)間げき水圧のみで表現した圧密の方程式が得られる。[1]　しかも，この形の方程式を用いれば，圧密現象に対する固有値，固有関数がより容易に理解される。[2]　ここでは問題を球の場合に限定し，実際にそれらの固有値，固有関数を算定する。　本来，球の圧密問題は，Biot と Terzaghi の理論にそれぞれ従う圧密現象の差異を明らかにする目的で，Cryer[3]によって研究されたものであるが，固有値問題の一例として改めて検討を加えることが本報告の主旨である。

2. 圧密現象における固有値問題

圧密の完了した状態を変形の基準状態にとると，圧密中の間げき水圧$u(x)$と体積ひずみ$\theta(x)$との間には式(1)あるいは式(2)の関係が存在する。　ここにx，Xは領域V内の点，$\Theta(x,X)$および$\Phi(x,X)$は，斉次境界条件のもとでそれぞれ$u=\delta(x,X)$を作用させたときの体積ひずみ分布，および$\theta=\delta(x,X)$と拘束したときの間げき水圧の分布である。　ただし$\delta(x,X)$はdelta関数である。　ここでkを透水係数，γ_wを間げき水の単位体積重量としてDarcyの法則を仮定すれば，式(3)なる連続条件式が成立するが，これに式(1)あるいは式(2)を代入して間げき水圧のみで表現した圧密の方程式(4)あるいは(5)を得る。　式(5)は，ある時刻tにおける間げき水圧の分布より，それの時間的変化率が求まるという形式（発展方程式）であって，局所的な間げき水圧の挙動をみるのに適したものであるが，固有値問題として扱うには式(4)の方が都合のよい形をしている。　そこで以下では，式(4)を中心に球の圧密について考察する。

3. 球の圧密への適用

骨格の等方性を仮定すれば，球の問題に対する式(1)の関係は容易に求まって式(6)のようになる。　ここにλ, μはLaméの定数である。　よって固有値問題に適した圧密の方程式(4)は，この場合式(7)となる。　ここで以下の記述を簡単にするため，その下に表わす無次元化を行なった。　式(8)のように固有値を$-\eta_i^2$として式(7)に代入すると，式(9)なる固有方程式を得る。ただし積分項をI_iとおいた。(式(10)参照)　これは，微積分方程式であるが，$r=0$(球の中心)でu_iが有界であることを用いると式(11)に示す解をもつ。　つぎに$r=1$(球の表面)において$u_i=0$であること，および式(10)を満足するためには，η_iに式

$$\begin{cases} \theta(x) = \displaystyle\int_V \Theta(x,X)\, u(X)\, dX & (1) \\ u(x) = \displaystyle\int_V \Phi(x,X)\, \theta(X)\, dX & (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_V \theta(x,X)\frac{\partial u}{\partial t}(X)\, dX = -\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u & (4) \\ \displaystyle\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w}\int_V \Phi(x,X)\nabla^2 u(X)\, dX & (5) \end{cases}$$

$$\theta(x) = -\frac{1}{\lambda+2\mu}\left\{u(x) + \frac{12\mu}{3\lambda+2\mu}\frac{1}{R^3}\int_0^R s^2 u(s)\, ds\right\} \qquad (6)$$

R: 半径

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta\int_0^1 s^2 \frac{\partial u}{\partial t}(s)\, ds = \nabla^2 u \qquad (7)$$

$$\begin{cases} t \sim \dfrac{k(\lambda+2\mu)t}{\gamma_w R^2} \qquad r \sim \dfrac{r}{R} \\ \beta \sim \dfrac{12\mu}{3\lambda+2\mu} \end{cases}$$

$$u(r,t) = u_i(r)\, e^{-\eta_i^2 t} \qquad (8)$$

(12)なる条件が必要である。あるいは書き改めると式(13)なる固有値の決定方程式が求まる。ここにνはPoisson比である。この方程式はCryerが求めたものと一致している[4]。そして式(13)の両辺の曲線を示した図-1よりη_iを求めることができる。たとえば$\nu=1/3$のとき，初めの3つのη_iと固有関数は表-1のようである。ただし固有関数u_i(式(11))は，$r=1$での境界条件より式(14)の形となり，η_iより直ちに求められる。さらに固有関数系には式(15)の意味で直交関係があり，任意の初期値u_0に対し式(16)なる解の表示ができる。$\nu=1/3$のとき，$u_0\equiv 1$として式(16)の初めの3項を求めたものが表-2であって，球の中心での間げき水圧uの推移を$\sqrt{t}\geqq 0.2$の範囲で示したのが図-2の黒点である。図中，実線はCryerの求めた解であり$\sqrt{t}\geqq 0.2$の範囲ではほとんど一致している。また$\sqrt{t}\geqq 0.3$の範囲では，第2項以下は無視しうるほど減衰している。

図-1

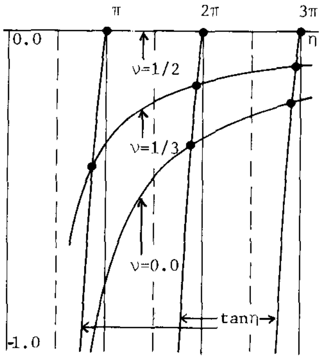
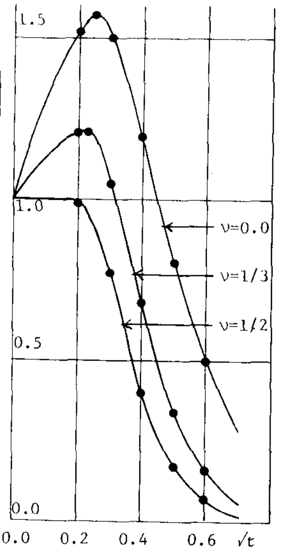


図-2



謝辞　本研究の遂行にあたり懇切な御指導を頂いた京都大学工学部　赤井浩一教授に謝意を表します。

参考文献

1) 田村　武：Biotの圧密方程式に関する一考察，土木学会論文報告集，第274号，昭.53.
2) 田村　武：多次元圧密における固有値問題とその応用，第13回土質工学研究発表会講演集，昭.53.
3) Cryer, C.W. : A Comparison of The Three-dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi, Quart. Journ. Mech. Appl. Math., 1963.
4) Gibson, R.E., K. Knight and P.W. Taylor : A Critical Experiment to Examine Theories of Three-dimensional Consolidation, Proc. Europ. Conf. Soil Mech., 1963.

$$\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du_i}{dr}+\eta_i^2[u_i+\beta I_i]=0 \qquad (9)$$

$$I_i=\int_0^1 s^2u_i(s)ds \qquad (10)$$

$$u_i(r)=\frac{\sin\eta_i r}{\eta_i r}-\beta I_i \qquad (11)$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\sin\eta_i}{\eta_i} & -\beta \\ \dfrac{\sin\eta_i-\eta_i\cos\eta_i}{\eta_i^3} & -\left(1+\dfrac{\beta}{3}\right) \end{vmatrix}=0 \qquad (12)$$

$$\tan\eta_i=\frac{\eta_i}{1-\dfrac{1-\nu}{2(1-2\nu)}\eta_i^2} \qquad (13)$$

$$u_i(r)=\frac{\sin\eta_i r}{\eta_i r}-\frac{\sin\eta_i}{\eta_i} \qquad (14)$$

$$\langle u_i,u_j\rangle=\int_0^1 r^2(u_i+\beta I_i)u_j dr=0 \quad (i\neq j) \qquad (15)$$

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle u_i,u_0\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}u_i(r)e^{-\eta_i^2 t} \qquad (16)$$

表-1

$$\begin{cases}\eta_1=2.744\\ \eta_2=6.117\\ \eta_3=9.317\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_1(r)=\dfrac{\sin\eta_1 r}{\eta_1 r}-0.141\\ u_2(r)=\dfrac{\sin\eta_2 r}{\eta_2 r}+0.027\\ u_3(r)=\dfrac{\sin\eta_3 r}{\eta_3 r}-0.012\end{cases}$$

表-2

$$\begin{aligned}u(r,t)=&+2.56\,u_1(r)e^{-\eta_1^2 t}\\ &-2.08\,u_2(r)e^{-\eta_2^2 t}\\ &+2.03\,u_3(r)e^{-\eta_3^2 t}\end{aligned}$$