III-49　観測的方法による沈下予測

京大・工学部　正員　○浅岡　顕
愛知県　　　　正員　　沼野　秀樹

1　はじめに

圧密方程式の解析解が沈下予測の問題に有効に利用できるのは，地盤が水平方向に均質・連続で圧密係数，過剰水圧の初期分布，排水距離・排水条件さらに土の終局ひずみ量らの諸条件が事前に正確に与えられている場合にかぎられている。しかし実際の工学問題でこのようなことはまれであるから，正確な将来沈下の予測のためには地盤の挙動を観測して逆にこのような未知の諸条件を同定してやることが必要である（一種の逆値問題）。そして将来沈下の予測などは，このようにして同定されたパラメータを用いて行なうのがよい。

問題のこのような定式化にはいくつかの困難がともなう。そのひとつは，観測の種類が未知なパラメータの数にくらべて大きく制限されていることから生じる。実際，過剰水圧の地盤内分布がどのような現場でも常に正確に観測されているなどと考えることは空想的である。大多数の普通の仕事においては，せいぜい地盤表面の沈下が観測できるにすぎない。第2の困難は，観測値が常に摂動項を含んでいることである。このような摂動は地盤の不均質性や観測の誤差に起因する統計的な性質をもっている。これは問題が，統計的なパラメータ同定と不可分であることを示している。

問題をこのように定式化することの最大の利点は，将来の予測の信頼性の高さにある。このことはおもに同定されたパラメータが地盤のマクロで空間的な性質を代表していることによって保証される。これにくらべると，土質調査と土試料の試験から得られるパラメータの値は，地盤のミクロでローカルな情報しかもたらさない。

2　未知なパラメータの事後分布の形式的記述

例として，両面排水条件，荷重一定のもとでの1次元圧密の逆値問題を考える。圧密の式は三笠式で与える。

$$\dot{\varepsilon} = c_v\, \varepsilon_{zz} \tag{1}$$

$\varepsilon_{ij} \overset{d}{=} \varepsilon(i\Delta t,\ j\Delta z)$ として，(1)の explicit な差分形式

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = A\,\boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi}_i \tag{2}$$

を考える。ここに

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i' = (\varepsilon_{i1},\ \varepsilon_{i2},\ \cdots\ \varepsilon_{in})$$

$$A = \alpha I + \beta(N + N'),\quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}' = (b_u,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ b_\ell)$$

$b_u,\ b_\ell$ ：　境界での ε の値

$\boldsymbol{\xi}_i$ ：ノイズベクトル，各成分について，その独立性と分散 σ_p^2 の一定性を仮定する。

これより $\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}$ の確率密度関数(pdf)を

$$p(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \mid \theta_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i) \tag{3}$$

と記述する。ここに $\theta_1' = (\alpha,\ \beta,\ b_u,\ b_\ell,\ \sigma_p)$ は未知な plant parameter vector である。つぎに観測機構として沈下をとりあげる．

$$\rho_i = \Delta z \cdot \sum_j \varepsilon_{ij} + \eta_j \tag{4}$$

ここに η_i は観測誤差を表わし　その分散を σ_0^2 と書く。(4)の未知パラメータベクトルを $\theta_2' = (\Delta z,\ \sigma_0)$ で表わして，ρ_i の pdf を

$$p(\rho_i \mid \theta_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i) \tag{5}$$

で表わす。θ_1, θ_2 の事前分布を $p_0(\theta_1, \theta_2)$，初期条件 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ の確からしさを $p_0(\boldsymbol{\varepsilon}_0)$，

$$p_0(\theta_1,\ \theta_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_0) = p_0(\theta_1,\ \theta_2)\, p_0(\boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{6}$$

とすれば，式(3)，(5)，(6)にベイズ定理と確率の連鎖法則を巧みに適用することによって，観測値

$$\rho^i = (\rho_0,\ \rho_1,\ \cdots,\ \rho_i)$$

を得たことによる，θ_1, θ_2, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ の事後分布が

$$p(\theta_1,\ \theta_2,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \mid \rho^i)$$

$$\propto \int p_0(\theta_1, \theta_2, \boldsymbol{\varepsilon}_0)\, p(\rho_0 \mid \boldsymbol{\varepsilon}_0, \theta_2) \prod_{j=1}^{i} p(\boldsymbol{\varepsilon}_j \mid \theta_1, \boldsymbol{\varepsilon}_{j-1}) \cdot p(\rho_j \mid \boldsymbol{\varepsilon}_j, \theta_2) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_0\, d\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdots d\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} \tag{7}$$

で与えられることが証明される。

3　簡便で実用的な方法

2に述べた方法は，未知なパラメータのひとつひとつを別個に，相互の統計的な関係を明らかにしつつ同定できるものの，実際の数値計算は膨大な多重積分のためにほとんど不可能に近い。目的を将来沈下の予測という点にだけ絞れば，はるかに簡便な方法が存在する[1]。荷重一定のもとで，式(1)から沈下量 $\rho(t)$ に関する次式が導かれる。

$$\rho + c_1\dot{\rho} + c_2\ddot{\rho} + \cdots + c_n\overset{(n)}{\rho} + \cdots = \rho_f \tag{8}$$

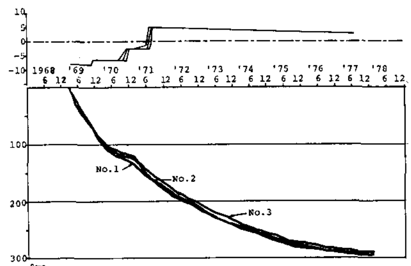
ここに，$c_i = \dfrac{1}{(2i+1)!}\left(\dfrac{H^2}{c_v}\right)^i$（両面排水のとき），$c_i = \dfrac{1}{2i!}\left(\dfrac{H^2}{c_v}\right)^i$（片面排水のとき）であり，$\rho_f$ は最終沈下量。(8)がフルビッツ条件を満すことは，たとえばラウスの方法などによって容易に確められる。この安定性から(8)の高階微分項は無視できて，

$$\rho + \sum_{i=1}^{n} c_i\overset{(i)}{\rho} = \rho_f \tag{9}$$

なる(8)の近似式を得る。(9)の特性根は，(8)の特性根（のうち大きいものから順に n コ）とは正確には一致しない。原方程式(1)の解の近似のために，その固有値（(8)の特性根に比例）の大きいもの（負だから絶対値の小さいもの）をいくつかとりあげる方法が普通には考えられようが，そのような近似よりも(9)による近似の方が時刻 t の初期の段階から良好な結果を与える（ことを示すことができる）。しかしともかく，実際には，両面排水か片面排水なのか，さらに時間無次元化係数（H^2/c_v），ρ_f などすべてはっきりとはわからないのだから，問題は，(9)の差分表示式

$$\rho_j = \beta_0 + \sum_{s=1}^{n}\beta_s\rho_{j-s} \tag{10}$$

を用いて，観測値 $\rho^i = (\rho_0, \rho_1, \quad, \rho_i)$ から未知係数 $\beta_0, \beta_s\ (s=1,2,\cdots)$ を同定する問題に帰着する。ところが，残念なことではあるが，非定常（$E(\rho_j) \neq$ const.）な自己回帰過程(10)の厳密なパラメータ同定は，（(7)と同様の多重積分のために）現在の統計学ではまだ十分に成功していない。ただ $n=1$ の場合には解けている（文献(1)）。そこで，(10)で $n=1$ がどれほど良好な近似を与えるかを調べ，結果が不満足な場合にだけ，n を2，3，とつぎつぎあげてゆき，このときはたとえば最小自乗法で係数を定めるという方法を提案する。沈下予測モデル(10)は，1次元圧密にかぎらずかなり汎用性のあることが確められつつある。

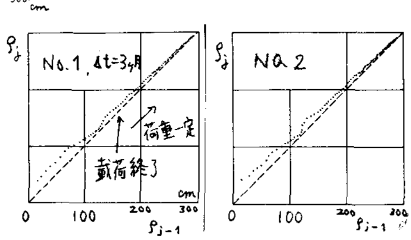


4　実際の沈下観測事例

$n=1$ のときは，(ρ_j, ρ_{j-1}) 座標で観測値が直線にのることを示唆する。勾配が β_1 であり切片が β_0 である。この係数は，

$\rho_f = \beta_0/1-\beta_1$，　$\ln\beta_1 = -\dfrac{6c_v}{H^2}\Delta t$ or $-\dfrac{2c_v}{H^2}\Delta t$　なる意味をもつ。

右図は神戸における埋立地の沈下観測データである。$\Delta t = 3$ヶ月とし点 (ρ_j, ρ_{j-1}) をプロットしたものが下の3つの図である。これらの図は，(10)の第1次回帰式で実際上十分であることを示している。埋立地建設等においては荷重載荷の履歴が正確にわからず，盛立て完了時にはすでに沈下が50%近く終了していることが多い。このことも式(10)の1次回帰モデルが十分実用性をもつひとつの根拠になっている。



右図のとくにNo.3のデータについて厳密なパラメータ同定を行なった結果を紹介する。図で1972年12月までのデータを用いて，$\Delta t = 1$ヶ月(30～31日)として β_0, β_1 の事後分布を計算した。この t 分布の最頻値は $\beta_0 = 6.94$，$\beta_1 = 0.9791$ となりしたがって $\rho_f \fallingdotseq 332$ cm，と予測される．また必要なら β_1 から c_v や H も逆算できる。さらにこのようにして同定されたパラメータを用いて，1976年12月の沈下量を予測したところ，$\rho_{1976.12月} = 270 \sim 288$ cm が信頼度ほぼ90%の信頼区間であり，最頻値279cmは，実際のこの年この月の観測値281cmに対し良好な予測値となった。[参考文献(1) ASAOKA, Observational Procedure of Settlement Predection, S&F（投稿中）]