

東北大学工学部 正員 岸野佑次

1. まえがき

不均質な材料の巨視的な力学モデルにおけるラグランジュ状態とオイラー状態とは変形の統計的観察を通して初めて関係づけられるものと考えられる。従って、粒状体のような材料においては不均一な力学量をいかに理想化するかということが重要な問題であると思われる。本文では有限変形を考慮に入れた力学量の平均化の方法について考察するとともに、平均的な変形からの偏差を表わすパラメーターを定義し、更に二次元粒状体モデルの実験についての解析例を示した。

2. 粒状体における平均的変形

粒状体内の微小領域 R に含まれる粒子 $P_i (i=1, 2, \dots, N)$ の重心の変位 u_i^* をもとに R の連続体的な平均的変形の場を求めることを考える。 R 内の規準点 O の平均的な変位を u , R における平均的な変形勾配テンソルを F , O 点と P_i とを結ぶ変形前の線素ベクトルを φ_i とおけば, P_i の平均的変位は $u + (F - I) \cdot \varphi_i$ (I は単位テンソル) で表わされる。ここで, P_i 点の実際の変位 u_i と上述の平均的な変位との残差

$$\Delta u_i = u_i^* - \{ u + (F - I) \cdot \varphi_i \} \quad (1)$$

の内積の和を S とおく。即ち,

$$S = \sum_{i=1}^N \Delta u_i \cdot \Delta u_i \quad (2)$$

ここで, S を最小とする条件より F , u を定めるものとするれば次式を得る。

$$u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^* - (F - I) \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_i \right) \quad (3)$$

$$F = I + \left(\sum_{i=1}^N u_i^* \varphi_i - u \sum_{i=1}^N \varphi_i \right) \cdot \varphi_i^{-1} \quad (4)$$

ここに,

$$C = \sum_{i=1}^N \varphi_i \varphi_i \quad (5)$$

また, (4), (5) 式中の積を表わす記号の介在しないベクトルの積はグイアド積を示しているものとする。特に,

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i = 0 \quad (6)$$

が成立する場合には, (3), (4) 式はそれぞれ次式となる。

$$u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^* \quad (7)$$

$$F = I + \left(\sum_{i=1}^N u_i^* \varphi_i \right) \cdot \varphi_i^{-1} \quad (8)$$

微小な歪および回転を表わすテンソルを E , R と記せば, 次式が成立する。

$$E = \frac{1}{2} (F^T + F) - I, \quad R = \frac{1}{2} (F^T - F) \quad (9), (10)$$

3. 平均的変形からの偏差の尺度

(2) 式で定義されるスカラー量 S は平均的変形からの偏差を表わす一つの尺度である。この量はテンソル

$$T = \sum_{i=1}^N \Delta u_i^* \Delta u_i \quad (11)$$

のトレース ($\text{tr}(T)$) となっている。 T の成分は Δu_i^* の三成分間の共分散 (対角成分は各成分の分散) を表わしており, 対称二次テンソルの性質より, 主軸方向は分散の値の極値を与える。従って, T は偏差の程度を表わすと同時に, 異方的な変形特性を表現しているものとみなすことができる。

次に, 偏差量の平均的変形に対する相対的大きさを表現するために, 微小変形に限定して, 次のような量を定義する。

$$S = \sum_{i=1}^N (u_i^* - u - R \cdot \varphi_i) \cdot (u_i^* - u - R \cdot \varphi_i) \\ = \text{tr}(E \cdot C \cdot E) + \text{tr}(T) \quad (12)$$

即ち, S は R の変形の剛体的変形からの偏差を表わすスカラー量であり,

$$\psi = \text{tr}(T) / \text{tr}(E \cdot C \cdot E) \quad (13)$$

とおけば, ψ は偏差量の平均的変形の程度に対する相対的大きさを表わす量とみなすことができる。特に, C の偏差成分が 0 で, 対角成分が全て C に等しい場合には次式を得る。

$$S = C (\varphi + \varphi' + \psi) E \cdot E \quad (14)$$

ここに, E を定義した空間が n 次元であるとすれば,

$$\varphi = \{\text{tr}(E)\}^2 / n E \cdot E \quad (15)$$

$$\varphi' = E' \cdot E' / E \cdot E = 1 - \varphi \quad (16)$$

$$\psi = \text{tr}(T) / C E \cdot E \quad (17)$$

また, E' は E の偏差成分を表わすものとする。(15) 式の φ は ψ と同様に E の複内積で規準化したスカラー量であり, 等方的歪の場合に 1, 非種歪のない場合には 0 の値となる。

4. 粒状体における平均的応力

重心が R に含まれる粒子に R の外から作用している接触力を f_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) とし, f_i^* の作用点に変位増分 δu_i が生じたとすれば, R に対して接触力のなす仕事の変形前の単位体積当りの増分は次式で与えられる。

$$\delta W_0 = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta u_i \quad (16)$$

変位増分 δu_i は 2 節で述べたような方法により既に決定しているものとし、

$$\delta u_i = \delta u + \delta F \cdot \bar{r}_i + \Delta \delta u_i \quad (17)$$

とおく。ここに、 δu , δF は R 内の標準点 O の平均の変位および R 内の平均の変形勾配テンソルの各増分を表わすものとし、 $\bar{r}_i$ は変形前における接触点の O からの位置ベクトルを表わすものとする。

(17) 式を (16) 式に代入すると次式を得る。

$$\delta W_0 = -X_0 \cdot \delta u + \sigma_0 \cdot \delta F + \Delta \delta W_0 \quad (18)$$

ここに、

$$X_0 = -\frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \sigma_0 = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{F}_i \quad (19), (20)$$

であり、 $\Delta \delta W_0$ は $\Delta \delta u_i$ に対する δW_0 の残差を表わすものとする。(19), (20) 式の X_0 , σ_0 はラグランジュ表示における物体カベクトルおよび応力テンソルとみなすことができる。R に作用する接触力によるモーメントの釣合式 (物体力は無視する) は

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0 \quad (21)$$

と表わされるので、(20) 式より導かれるオイラーの応力テンソル

$$\sigma = \frac{\nabla}{V} F \cdot \sigma_0 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \bar{F}_i \quad (22)$$

は一般には対称とはならない。但し (22) 式中、 $\bar{r}_i = F \cdot \bar{r}_i$ であり、 V は変形後の体積である。

5. 粒状体二次元モデルの実験に対する解析と考察

図-1 に示すような装置を用いた粒状体二次元モデルの光弾性実験²⁾ (粒モデル: 8, 10, 12 mm

割合 1:1:1, 荷重: P_1 変化, P_2 一定) において得られた写真とともに統計的力学諸量の計算³⁾を行なった。以下に図-1 の実線で囲った領域における計算結果について示す。図-2 は (11) 式で定義した π のモデルの内である。図-3 の折れ線グラフは光弾性写真とともに計算した応力テンソル (22) 式の等成分および最大剪断応力である。また、同図の棒グラフは連続した 2 枚づつの写真とともに計算した ψ (15) 式および ψ (17) 式の値を示している。写真番号 ④より⑩までは塑性流動的な変形段階であり、図-3 から⑤は最大応力に達していることが分かる。④以降は除荷、再荷の過程である。図-3 より、変形の平均値からの偏差を表わすパラメータ ψ は体積変化の影響を強く受けることが分かる。しかし、 ψ は塑性流動に移行す

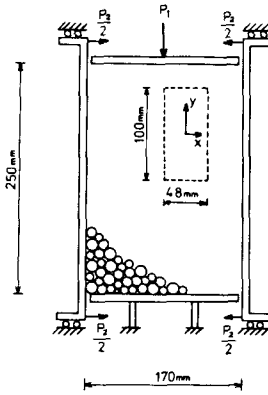
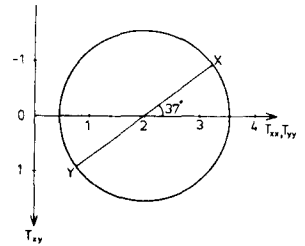


図-1 実験装置



変形段階 ④-⑤

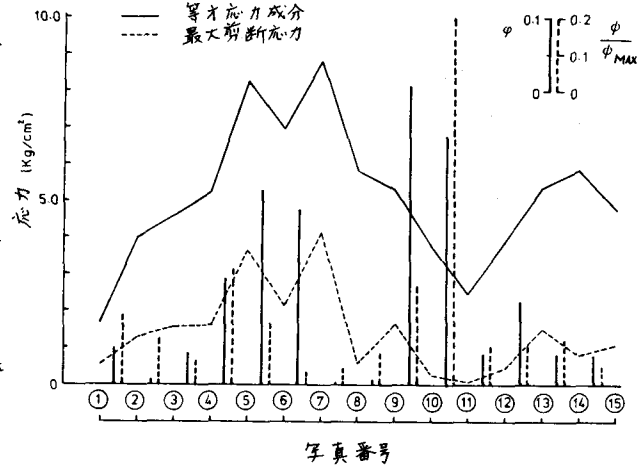


図-3 各写真より求めた応力と各変形段階における ψ と ψ の値

る変形段階④-⑤においては大きな値を示すが、その后除荷の前までは、たとえ体積変化の度合いの大きな変形段階においても ψ の値は大きくならない。このように、 ψ は粒状体の力学特性が急激に変化する変形段階において特に大きな値をとると考えられる。図-2 より、分散の卓越する方向は x 軸方向に傾いているが、この傾向は ψ が比較的大きな値をとる変形段階④-⑩、⑩-⑪において一層明瞭に現れた。このことより、 π が (載荷方法などに起因する) 変形特性の異質性を示し得るものと考えられる。

参考文献 1) 岸野:「平均質点材料の力学と一般化された連続体力学の対応について」, 52年度東北支部発表会 p.13 / 2) 宮地・佐武・新関:「粒状体の光弾性・二軸圧縮試験について」, 52年度東北支部発表会 p.190 / 3) 高橋・宮地・岸野:「粒状体の変形における一つの統計的解析手法とその考察」, 第32回年講 III-168, p.307