III－2　粒状体の異方性の表現に関する考察

東北大学工学部　　佐武正雄

1. まえがき

粒状体において，粒子構造のもつ異方性がその力学的性質に重要な影響を与えることはよく知られている。本文では，粒状体のグラフ表現[1)]を応用して，その異方性を表現する二三の方法について述べ，考察する。

2. 粒状体のグラフ表現

簡単のため，2次元の円形粒子の集合体について考察する。この場合，次の3種類のグラフが基本的である。

(1) 置換グラフ(Replaced Graph, 図－1(a))

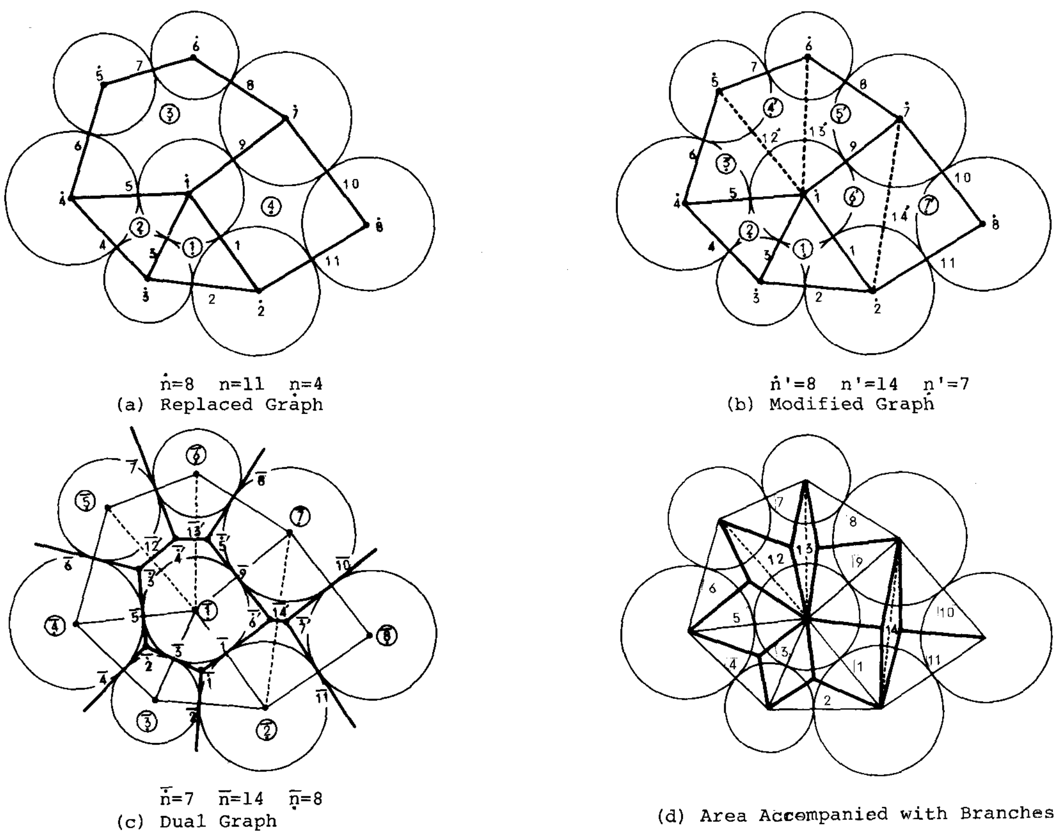
互に接触する粒子の中心を結んだグラフで，それぞれ粒子は点，接触点は枝，間隙は閉路に対応する(有向グラフで考察するが，図では向きを省略している)。

(2) 修正グラフ(Modified Graph, 図－1(b))

置換グラフに仮枝(接触する可能性の高い粒子の中心を結ぶ枝)を付加し，すべてが3角形閉路になるように修正したグラフ。

(3) 相対グラフ(Dual Graph, 図－1(c))

修正グラフの相対グラフ。相対グラフの枝はすべて修正グラフの枝と直交する。また，相対グラフの閉路は一つの粒子に対応し，一つの間隙に含まれる相対グラフの点の数は間隙の余剰度を示す。



$\dot{n}=8$　$n=11$　$\underset{\cdot}{n}=4$
(a) Replaced Graph

$\dot{n}'=8$　$n'=14$　$\underset{\cdot}{n}'=7$
(b) Modified Graph

$\dot{\bar{n}}=7$　$\bar{n}=14$　$\underset{\cdot}{\bar{n}}=8$
(c) Dual Graph

(d) Area Accompanied with Branches

図－1

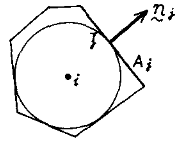
3. 異方性テンソル

n_j を置換グラフにおける枝 j の向きを示す単位ベクトルとする。

(1) 粒子の異方性（図－2）

双対グラフにおいて

$$\underset{\sim}{H}_i = \frac{2\overset{*}{D}_{ij} A_j \underset{\sim}{n}_j \underset{\sim}{n}_j}{\overset{*}{D}_{ij} A_j} \qquad (1)$$



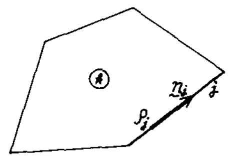
図－2

によって一つの閉路 i（すなわち一つの粒子 i）の異方性を表現することができる。ここに，$\overset{*}{D}_{ij}$ は修正グラフの接続行列，A_j は枝 $\bar{j}$ の長さで，j について総和をとる。閉路が正多角形であれば，$\underset{\sim}{H}_i = \underset{\sim}{I}$（$\underset{\sim}{I}$ は単位テンソル）となり等方的となる。

(2) 間隙の異方性（図－3）

置換グラフにおいて

$$\underset{\sim}{K}_k = \frac{2 L_{kj} \rho_j \underset{\sim}{n}_j \underset{\sim}{n}_j}{L_{kj} \rho_j} \qquad (2)$$



図－3

によって一つの閉路 k（すなわち一つの間隙 k）の異方性を表現することができる。ここに，L_{kj} は無向とした置換グラフの閉路行列，ρ_j は枝 j の長さである。閉路が正多角形であれば，$\underset{\sim}{K}_k = \underset{\sim}{I}$ となり等方的となる。

(3) 粒子集合体の異方性

図－1(d) に示すように，各枝 j に付随する面積を

$$V_j = \frac{1}{2} \rho_j A_j \qquad (3)$$

とし，

$$\underset{\sim}{J} = \frac{2}{V} \Sigma V_j \underset{\sim}{n}_j \underset{\sim}{n}_j \qquad (4)$$

によって，粒子集合体の異方性を表現することができる。接触方向 $\underset{\sim}{n}$ のパラメーターとして角度 θ をとり，その付随面積をウエイトとする確率分布を $E(\theta)$ で与えれば，式(4)は極限において

$$\underset{\sim}{J} = 2\int_0^{2\pi} E(\theta)\, \underset{\sim}{n}\, \underset{\sim}{n}\, d\theta \qquad (5)$$

となる。テンソル $\underset{\sim}{J}$ は粒状体の異方性を示し，その力学特性の考察に重要な役割をもつものと考えられる。

4. あとがき

グラフ表現を応用して，粒状体の異方性の表現について考察した。式(5)の異方性テンソルは Horne[2)] の与えたものと類似の形をしているが，その付随面積（3次元では体積）をウエイトとして確率分布を考慮している点において相異している。これらの異方性の表現をとり入れて，粒状体力学の構成式の考察をすゝめてゆきたいと考えている。

参考文献

1) M. Satake : Constitution of Mechanics of Granular Materials through Graph Representation, Teoretical and Applied Mechanics, Vol.26(1978), p.257 − 266

2) M.R.Horne : The Behaviour of an Assembly of Rotund, Rigid, Cohesionless Particles I, Proc.Royal Society A Vol.286(1965), p.62 − 78