III-1　粒状体の力学現象に対するエネルギー的考察(2)

京都大学防災研究所　正員　北村良介
同上　正員　足立紀尚

1. 概要

材料力学の分野では材料の力学特性を解明していく際に，最も基本的な量としてエネルギーがよく用いられてきている。土質力学においてもエネルギーという物理量は微視的あるいは巨視的いずれの立場に立っても土の力学的挙動を解明するための最も基本的な量であると考えられる。北村は形状，大きさが不規則である粒子が集まって複雑な粒子構造を形成している砂質土のような粒状体の応力～ひずみ関係を解明するために，粒子の確率的な運動にマルコフ過程を適用した力学モデルを提案しており[1)]，マルコフ過程の基礎方程式における係数を決めるためにエネルギーを用いている。今回の発表では熱力学の第1法則(エネルギー保存則)が北村の提案している力学モデルにおいてどのように適用されているかを物性論的な立場から考察し，エネルギーという物理量が提案している力学モデルで占めている役割を示すことにする。また，豊浦砂を用いた排水三軸圧縮試験結果と，それをもとに提案している力学モデルを用いて行った数値実験結果を比較することによりモデルの妥当性を検討することにする。

2. 熱力学の第1法則(エネルギー保存則)[2)]

エネルギー保存則は一般に次式であらわされる。

$$\Delta U = Q + W_{ex} \tag{1}$$

ここに，ΔU：系の内部エネルギーの増分，　Q：系の外からうけた熱量，　W_{ex}：外から系になされた仕事。
系の変化が断熱過程であるとすれば$Q=0$であり，(1)式は次のようになる。

$$\Delta U = W_{ex} \tag{2}$$

提案している力学モデルにおいて，(2)式に対応するエネルギーのつりあい式は次式であらわされる。

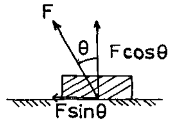
$$\sum_{\beta_1=0}^{\pi/2}\sum_{\beta_2=0}^{2\pi}\left(n_{\eta,1}\cdot x_{\eta,1} + n_{\eta,2}\cdot x_{\eta,2} + n_{\eta,0}\frac{x_{\eta,1}+x_{\eta,2}}{2R_\eta}\right) = \Delta W \tag{3}$$

ここに，$x_{\eta,1}$，$x_{\eta,2}$：それぞれ接点角が$\eta=(\beta_1,\beta_2)$である接点におけるポテンシャル障壁の最小値と最大値，$n_{\eta,1}, n_{\eta,2}$：接点角ηを有する接点のうち，応力状態の変化によりポテンシャル障壁$x_{\eta,1}$，$x_{\eta,2}$を乗り越える，すなわち，不可逆な運動をする接点数，$n_{\eta,0}$：接点角ηを有する接点の中で，ポテンシャル障壁を乗り越えることができない，すなわち，可逆な運動をする接点数，R_η：可逆な運動をする接点がどの程度までポテンシャル障壁の山を登ることができるかをあらわす係数，ΔW：応力状態の変化により粒状体内に出入する仕事量。
(3)式に関する詳細な説明は文献1)を参照されたい。
(3)式の左辺は粒状体内の各接点において，載荷過程では保存あるいは消費されるエネルギーの総和をあらわし，除荷過程では解放されるエネルギーの総和をあらわしている。次節では(3)式の左辺に含まれるポテンシャル障壁の最小値$x_{\eta,1}$について考察することにする。

3. ポテンシャル障壁の大きさについて

ある応力状態での接点角がηである接点におけるポテンシャル障壁の最小値$x_{\eta,1}$は[力]×[長さ]の次元をもつ物理量であり，したがって，$x_{\eta,1}$を求めるには接点角がηである接点において接点角を変化させる力Tと接点角の変化量δが既知とならなければならない。ここでは，まず接点角を変化させる力Tについて考えることにする。基本的な考え方は2つの物体間のマサツ則に基礎を置いている。質点力学によれば，図-1に示すような2つの物体間にFという力が作用した場合に次式で示す条件が満足されると2つの物体間にすべりが生ずる。

$|\tilde{F}|\cdot\sin\theta > \mu\cdot|\tilde{F}|\cdot\cos\theta$ (4)



図−1

ここに，μ：静止マサツ係数。

粒状体内の各接点においてこの考え方を適用すれば，(4)式中の$\tilde{F}$は粒子間力，θは接平面の法線と粒子間力がなす角度に対応する。しかし，形状，大きさが不規則な粒子が集まった粒状体では，粒状体内のある粒子のある接点における接点角の変化はその粒子の他の接点の影響をうけ，(4)式で示される2つの物体間のすべりの条件を必ずしも満足していないものと考えられる。すなわち，$|\tilde{F}|\cdot\sin\theta$が$\mu\cdot|\tilde{F}|\cdot\cos\theta$より小さいにもかかわらず接点角の変化が生じたり，$|\tilde{F}|\cdot\sin\theta$が$\mu\cdot|\tilde{F}|\cdot\cos\theta$より大きいにもかかわらず接点角の変化がない接点が粒状体内に存在するものと考えられる。したがって，提案している力学モデルにおいて，$x_{\eta,1}$を求めるために必要な接点角を変化させる力$\tilde{T}$は次のように仮定している。

$0\le\theta<\tan^{-1}\mu$ のとき，$|\tilde{T}|=\mu\cdot|\tilde{F}|\cdot\cos\theta$ (5)，$\tan^{-1}\mu\le\theta\le\pi/2$ のとき，$|\tilde{T}|=|\tilde{F}|\cdot\sin\theta$ (6)

(5)式は2つの物体間のマサツ則を適用すれば，すべらない接点における接点角を変化させようとする力をあらわし，(6)式はすべりを生ずる接点における接点角を変化させようとする力をあらわしている。

$x_{\eta,1}$を求めるために必要なもう1つの量である接点角の変化量δについては次のように考えている。応力比が変化するせん断過程においては，松岡ら[3]が提案している空間モービライズド面（略してSMP）は変化するわけであるが，提案している力学モデルにおいてはSMPを潜在すべり面として用いており，接点角は潜在すべり面へ指向するように運動するとしている。そして，接点角の変化量の平均値$\bar{\delta}$は接点角に関係なくSMPの変化量$\Delta\phi_{mo}$に等しいものと仮定している。

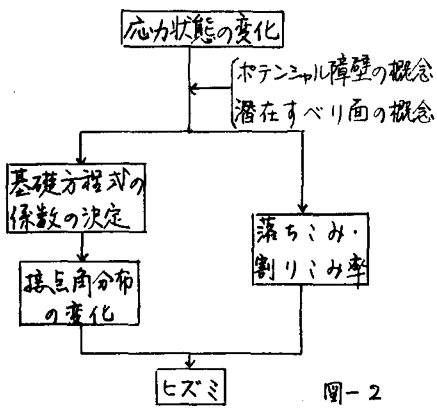
今節のこれまでの議論より$x_{\eta,1}$は次のように求まる。

$0\le\theta<\tan^{-1}\mu$ のとき，$x_{\eta,1}=|\tilde{T}|\cdot\bar{\delta}\cdot\bar{D}/2=\mu\cdot|\tilde{F}|\cdot\cos\theta\cdot\Delta\phi_{mo}\cdot\bar{D}/2$ (7)

$\tan^{-1}\mu\le\theta\le\pi/2$ のとき，$x_{\eta,1}=|\tilde{T}|\cdot\bar{\delta}\cdot\bar{D}/2=|\tilde{F}|\cdot\sin\theta\cdot\Delta\phi_{mo}\cdot\bar{D}/2$ (8)

ここに，$\bar{D}$：粒子の平均粒径。

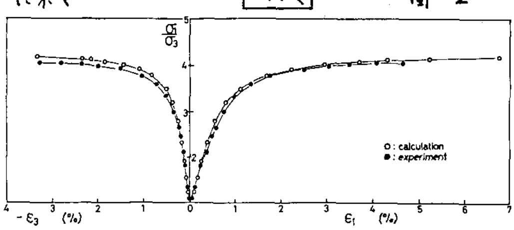
図−2は提案している力学モデルの骨子をあらわすフローチャートである。今回の発表では応力状態の変化よりマルコフ過程の基礎方程式の係数の決定あるいは落ちこみ割りこみ率を決めるために必要なポテンシャル障壁の概念について考察を行い，ポテンシャル障壁を具体的に求める一手法を示してきた。(7)，(8)式中で用いた粒状体の力学特性を表現しているマサツ係数μ，粒子間力$\tilde{F}$に関する詳しい考察は文献1)を参照されたい。



図−2

4. 数値実験結果

図−2に示した手順に従って数値実験を行った結果が図−3に示されている。図−3には数値実験を行う際に必要な数個の定数を求めるために行った側圧一定（3 kg/cm²）排水三軸圧縮試験結果も併記されている。図より提案している力学モデルはかなりよく実際の粒状体の力学挙動を表現できることがわかる。



図−3

参考文献

1) 北村良介(1978)：マルコフ過程を用いた粒状体の力学モデル(1)，京大防災年報，第21号B-2，(投稿中)．
2) 北村良介，足立紀尚(1977)：粒状体の力学現象に対するエネルギー的考察，第32回年次講演会，Ⅲ-39．
3) 松岡元，中井照夫(1974)：3軸応力下の土の変形・強度特性，京大防災年報，第17号B，pp.319-333．