II-437　津波遡上の数値解析法に関する検討

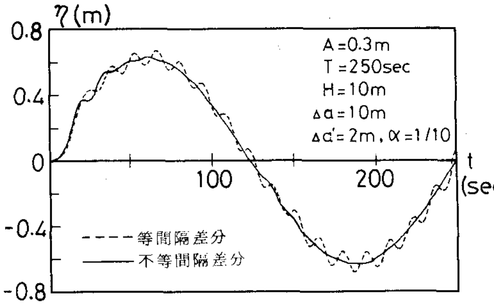
東北大学工学部　正会員　佐藤　淳
東北大学工学部　正会員　首藤伸夫

1．はじめに

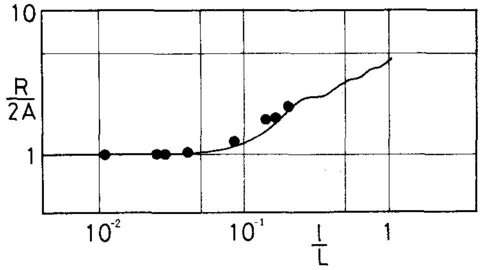
前論文[1]では、斜面上の最汀線区間に生じる微小振動について検討し、実際に数値解析を行うための計算条件を、ある程度明らかにすることができた。微小振動の発生原因は、斜面上での差分式の安定性と関連がある。ここでは初めに、微小振動を除去するために不等間隔差分を用いた場合について考察する。次に、この方法による数例の計算結果と、Von Neumann の方法によって導びかれる斜面上での安定条件を比較し、斜面勾配の変化に対しても、実用上安定な解を得るための計算条件を明らかにする。

2．微小振動の除去

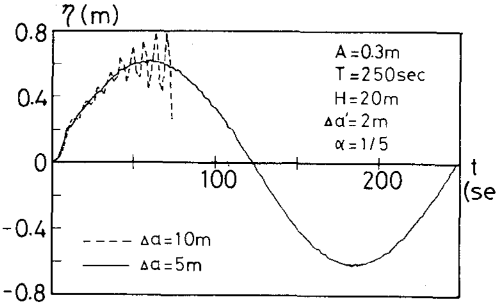
最汀線区間に生じる微小振動は、その振幅および周期とも、格子間隔（Δa）と比例関係にある。したがって、Δa を無限に小さくとれば、最大遡上高への影響はとり除くことができる。そこで、斜面最汀線部と仮想境界部の格子間隔だけを小さくした、不等間隔差分を用いた。その結果、得られた時間波形を図－1に示す。微小振動はかなり除去されている。図－2は、不等間隔差分による計算値と、理論値を比較したものである。理論値に対し、10％以内の誤差であることがわかった。不等間隔差分を用いると、斜面上での不安定成分は除去され、実用上安定な解が得られるといえる。しかし、斜面勾配を更に急にすると、図－3に示すような不安定な解が得られた。このときでも、Δa を変えて安定な解を得ることができる。これより、斜面勾配と格子間隔の間には、安定な解を得る為の条件があるように認められる。



図－1　不等間隔差分による時間波形



図－2　理論値との比較



図－3　斜面勾配と格子間隔との関係により不安定の生ずる例

3．斜面上の差分式の安定性

斜面上の津波に対しては、以下の式を差分式として使用している。

$$x_{m,n+1} = 2x_{m,n} - x_{m,n-1} + \gamma(x_{m+1,n} - 2x_{m,n} + x_{m-1,n}) + \gamma\delta(x_{m+1,n} - x_{m-1,n}) \qquad (1)$$

ここで、$\gamma = gh_{max}\left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)^2$，$\delta = \frac{\alpha\cdot\Delta a}{h_{max}} = \frac{\Delta a}{\ell}$ である。

Von Neumann の方法に従って安定性を調べる。Fourier級数展開を用い、誤差が $E = \exp[i\beta m\Delta a]\xi^n$（ただし、$\xi$は時間ものみの関数）として与えられるとすれば、(1)式よりξの形を決める式が得られる。

$$\xi^2 - 2\xi + 1 = \{2\gamma\delta i \sin(\beta\Delta a) - 4\gamma\sin^2(\beta\Delta a/2)\}\xi \qquad (2)$$

安定性については、もし $|\xi| \leqq 1$ のときは「強安定」，$|\xi| \leqq 1 + O(\Delta t)$ では「弱安定」といえよう。

そこで、(2)式において簡単のため　$\sin^2(\beta\Delta a/2) \leqq 1$,
$-1 \leqq \sin(\beta\Delta a) \leqq 1$　を考慮し

$$\xi^2 - 2\{1 - 2\gamma \pm \gamma\delta i\}\xi + 1 = 0 \qquad (3)$$

の根を調べてみる。　いま　$\lambda_r = 1 - 2\gamma$, $\lambda_i = \gamma\delta$　と書けば
(3)式の根は

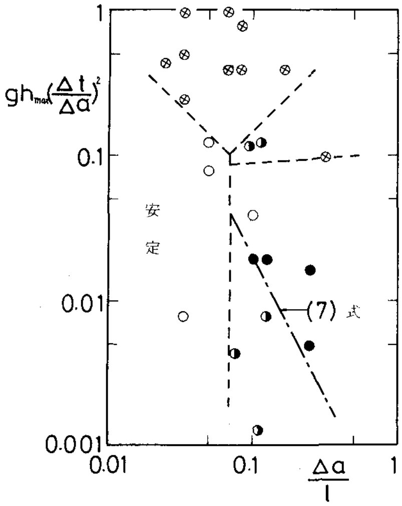
$$\left\{\begin{matrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{matrix}\right\} = \lambda_r + i\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_r^2 - \lambda_i^2 - 1 + 2\lambda_r\lambda_i i} \qquad (4)$$

で与えられる。ただし、水平床すなわち　$\lambda_i = 0\ (\delta = 0)$　のときに計算が安定となるよう　$1 - \lambda_r^2 \geqq 0$　とえらぶことを考えてある。
(4)式より $|\xi_1|$, $|\xi_2|$ の値を評価するのはかなり複雑であるので、特殊な場合についての評価を試みる。γ, δ を小さいものと考え

$$\lambda_r = 1 - 2\gamma \fallingdotseq 1 \quad , \quad \lambda_i = \gamma\delta \fallingdotseq 0$$
$$1 - \lambda_r^2 \fallingdotseq 0 \qquad \text{ただし} \qquad 1 - \lambda_r^2 > \lambda_i^2$$

とする。その結果

$$|\xi_1|^2 = |\xi_2|^2 = 1 + \frac{\gamma\delta}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}} + O(\delta^2) \qquad (5)$$



図－4　計算条件による安定領域の区分

となり

$$\gamma\delta = gh_{max}\left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)^2\frac{\Delta a}{\ell} = gh_{max}\left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)\frac{1}{\ell}\Delta t \qquad (6)$$

となるから　$\Delta t/\Delta a = \text{Const.}$　として分割を小さくすることを考えると、(5)式の第二項は $O(\Delta t)$ となり、「弱安定」といってよい。しかし、強安定ではないので、実用上問題の生じない範囲を定める必要がある。
いま

$$\frac{\gamma\delta}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}} < 1.5 \times 10^{-2} \qquad (7)$$

としてみる。図－4には、計算値で第一波で不安定の生じたもの●，第二波以降で不安定の生じたもの◑，微小な振動が最汀線部に生じたもの⊗，安定なもの○　を γ, δ をパラメタとして表示してある。(7)式が第一波で不安定な現象を起さない限界になっていることがわかる。

一般の γ, δ に対しては検討を行っていないが、以上の議論からわかる通り、安定，不安定を区分するパラメタは　$gh_{max}\left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)^2$，$\frac{\Delta a}{\ell}$　の二つである。ここで、$gh_{max}\left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)^2$ は水平床での計算を安定にするために、常に1より小さく選ばれる。この二つの組み合わせより、実用上問題となる精度の振動が現われる条件を分類したのが図－4である。

4. おわりに

現在用いている差分式は、Von Neumannの方法によって安定性を考えた場合に、水平床であれば「強安定」，斜面上であれば「弱安定」であることから、誤差が累積することはまぬがれない。結局、斜面上の最先端部に生じる微小振動の原因は、差分の「弱安定」にあり、今後、安定性に関する十分な検討が必要である。しかし、これまでの結果を考慮すれば、不等間隔差分を用い、$\Delta a/\ell$（格子間隔／斜面長）の値が、0.07よりも小さくなるように格子間隔(Δa)を決めてやれば、実用上の問題として安定な解を得ることができる。

《参考文献》

1). 佐藤淳，首藤伸夫：津波遡上の数値解析法に関する検討，昭和52年度東北支部技術研究発表会講演概要集　P106～107．