

名古屋工業大學 正員 石田 昭

”。开本又仁告

1. えがき 近年、さざざな現象内に存在する非線型干渉の把握にバイスペクトル解析が広く利用されている。ここではバイスペクトルをFFT法により求め、バイスペクトルの解釈と二次波峰現象へのバイスペクトル解析の適用について述べる。

2. バイスペクトル

2.1 バイスペクトルの導出 K.S.Liu らによつて導かれたFFT法によるバイスペクトル算定によれば、
水位変動 $\zeta(t)$ が式(1)で表わされるとすると、2変数自己相関関数の \cos 変換 $S(p, \theta)$ 、 \sin 変換 $T(p, \theta)$ 式(2)となり、バイスペクトルの絶対値 $B(p, \theta)$ とその位相 $\phi(p, \theta)$ は式(3)となる。

$$y(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i)$$

A_i : 角周波数 ω_i を持つ波の振幅

乙：角周波数 ω を持つ波の初期位相

$$S(p,g) = A_{\text{prg}} A_p A_g \cos(\varepsilon_{\text{prg}} - \varepsilon_p - \varepsilon_g)$$

$$T(p, \beta) = A_{\text{prg}} A_p A_\beta \sin(\epsilon_{\text{prg}} - \epsilon_p - \epsilon_\beta)$$

$$B(p,g) = A_{p+g} A_p A_g$$

$$\Theta(p, g) = \tan^{-1} T(p, g)/S(p, g) = \varepsilon_{p+g} - \varepsilon_p - \varepsilon_g$$

$\zeta = \bar{A} (A_{P+g}, B_{P+g}), (A_P, B_P), (A_g, B_g)$ はそれぞれ右角周波数 $P+g$, P , g を持つ波の振幅と初期位相である。単弦波ではバイスペクトルは存在せず ($charness = 0$)、水位変動が 2 以上の成分波からなり、かつ右角周波数 P, g および $P+g$ を持つ波が存在する場合にバイスペクトルが存在することを式(3)からわかる。図-1(a)(b)(c) はそれぞれ各成分波の個数が 2, 3, 4, 5 個存在する場合のバイスペクトル

$B(f_1, f_2)$ と振幅スペクトル $A(f)$ を示す。ただしバイスペクトルはオーバーラップの α を積んである。図-1 から水平変動に内在する成分波の個数が増すに従ってバイスペクトルが高周波側に広がってゆく様子がわかる。

2.2 バイスペクトルの場所の変化 式(3)は角周波数 P , θ , $P + \theta$ を持つ波が自由波または拘束波にいかわらず成り立つ。そこで自由波と拘束波のバイスペクトルの上での違いを調べるために次の式(4), (5), (6)について検討する。

$$y_1(t, x) = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A_2 \cos 2(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_1(t, x) = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A_2 \cos(2\omega_1 t - k_2 x)$$

$$y_3(t, x) = A_1 \cos(\pi t - k_1 x) + A_2 \cos 2(\pi t - k_1 x) + A_3 \cos\{\pi t - (k_1 + \pi k)\} x\}$$

$\eta(x,t)$ は 1 つの自由波と 1 つの拘束波からなる水位変動 (stokes の波), $\eta_0(x,t)$ は 2 つの自由波からなる水位変動, $\eta_1(x,t)$ は $\eta(x,t)$ に波数の k_1 だけ異なる成分波を加えた水位変動である。今、 η , η_0 , η_1 から式(3)を利用してバイスヘルツトルを求めると次式となる。

$$\gamma_i(t, x) \longrightarrow B(\tilde{r}_i, \tilde{r}_i) = A_1^2 A_2 \quad , \quad \theta(\tilde{r}_i, \tilde{r}_i) = 0$$

$$\gamma_i(t, x) \longrightarrow B(\tilde{r}_i, \tilde{r}_i) = A_1^2 A_2 \quad , \quad \theta(\tilde{r}_i, \tilde{r}_i) = (2k_1 - k_2)x$$

$$\theta(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 2 \tan^{-1} \frac{A_1 \sin k_1 x + A_3 \sin(k_1 + k_2)x}{A_1 \cos k_1 x + A_3 \cos(k_1 + k_2)x} - 2k_2 x$$

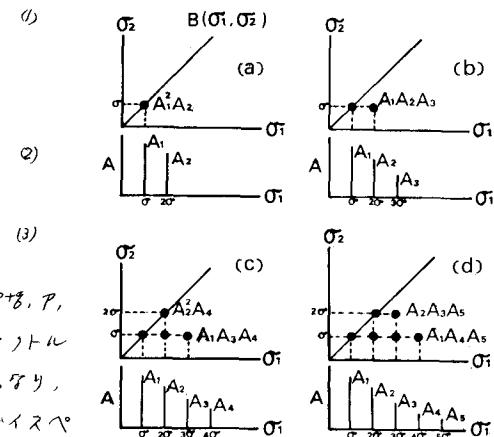


図-1. 振幅スペクトルとバイスペクトル

方のバイスペクトルは式のから場所的に変化しないか、これより形成する2つの波が同一波速で進行する定形波であるためである。また、この場合には、2つの波が異なる波速を持つため位相は場所によって変動する。また各の場合には角周波数 ω を持つ波の振幅が場所によって異なるため、バイスペクトルの絶対値 B と位相 θ はともに場所によって変動する。以上のことより、水位変動を調和解析して θ と $2\pi f$ の角周波数を持つ波が卓越していき場合には、2点で得られたバイスペクトルから角周波数 2ω を持つ波が自由波であるか、もしくは拘束波であるかある程度判断できると考えられる。

2.3 バイスペクトルの位相とskewness
正であれば波形の峰はsharpで谷はflatであり、またskewnessの値が大きいほどその峰はよりsharpとなり、skewnessが負の場合にはその逆であることはよく知られている。また波形の前後対称性についてはバイスペクトルの位相からある程度判断できると思われる。図-2に時間波形が示してある。この図より $\theta=0$ は波形が前後対称であり、 $\theta>0$ は波形の前方がsharpで後方がflat、 $\theta<0$ はその逆であることがわかる。

2.4 バイスペクトルの2次波峰現象への適用 一般に2次波峰現象は次式で表わされるように6個の成分波で水位変動 $\eta(x,t)$ を表示できる。この $\eta(x,t)$ から式(3)を用いてバイスペクトルを計算すると、

$$\begin{aligned} \eta(x,t) = & A_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t) + A_{02} \cos 2(k_0 x - \omega_0 t) + A_{03} \cos 3(k_0 x - \omega_0 t) \\ & + A_{10} \cos \{(k_0 x + k_1 x - \omega_0 t\} + A_{12} \cos \{(2k_0 x + k_1 x) - 2\omega_0 t + \pi\} + A_{13} \cos \{(3k_0 x + k_1 x) - 3\omega_0 t + \pi\} \quad (10) \end{aligned}$$

$$B(\theta, \phi) = [A_0^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{11}\cos(k_1 x)] / \sqrt{A_{02}^2 + A_{12}^2 + 2A_{01}A_{12}\cos(k_1 x + \pi)} \quad (11)$$

$$\theta(\theta, \phi) = \tan^{-1} \frac{-A_{02}A_{12}\sin(k_1 x) - A_{11}\sin\{(2k_0 x + k_1 x)\}x + \pi}{A_{02}^2\cos(k_1 x) + A_{12}^2\cos\{(2k_0 x + k_1 x)\}x + \pi} - 2\theta \quad (12)$$

$$B(\theta, 2\theta) = \sqrt{\{A_0^2 + A_{02}^2 + 2A_{01}A_{11}\cos(k_1 x)\}\{A_{02}^2 + A_{12}^2 + 2A_{01}A_{12}\cos(k_1 x + \pi)\}} \quad (13)$$

$$\theta(\theta, 2\theta) = \tan^{-1} \frac{-A_{02}\sin(3k_1 x) - A_{11}\sin\{(3k_0 x + k_1 x)\}x + \pi}{A_{02}^2\cos(k_1 x) + A_{12}^2\cos\{(3k_0 x + k_1 x)\}x + \pi} - \tan^{-1} \frac{-A_{01}\sin(k_1 x) - A_{11}\sin(k_1 x + \pi)x}{A_{01}^2\cos(k_1 x) + A_{11}^2\cos(k_1 x + \pi)} - \tan^{-1} \frac{-A_{02}\sin(2k_1 x) - A_{12}\sin\{(2k_0 x + k_1 x)\}x + \pi}{A_{02}^2\cos(k_1 x) + A_{12}^2\cos\{(2k_0 x + k_1 x)\}x + \pi} \quad (14)$$

$B(\theta, \phi)$, $\theta(\theta, \phi)$, $B(\theta, 2\theta)$, $\theta(\theta, 2\theta)$ が求まり式(11), (12)となる。図-3に2次波峰現象から算出されるバイスペクトルの一例を示す。横軸は X (場所)を示す。印↓は追越し点、印↑は発生点をそれぞれ表す。実線は式(11), (12)で描いたものであり、点線はB.T.法により各点で求めたものを示す。なお、この場合の条件は図中に示した通りであり、Tは基本成分波の周期であり、Xは2次波峰発生間隔である。2つの方法から得られるバイスペクトルはよく似た傾向を示し、スペクトルの絶対値は波数 k_1 だけ基本波と異なる成分波(A_{11}, A_{12}, A_{13})が存在するため場所的に変動し、追越し点だけ小さく、徐々に大きくなり発生点ですら小さくなるという傾向を持つ(これはもともと53人の6個の成分波の振幅に関係するのだが)。すなはち位相は追越し点、発生点とともに零となる。これは追越し点および発生点で波形は前後対称であることを意味する。また、追越し点と発生点の間では $\theta>0$ であり、このことより波形の前方がsharpで後方がflatであることを意味し、一方発生点と次の追越し点の間では $\theta<0$ より波形は後に傾いていることが2.3より推測され、実際の時間波形からもこのことは読みとれる。

3. 結論 2つ以上の自由波が存在する水位変動から得られるバイスペクトルはその絶対値、位相ともに場所的に変動し、すなはち位相の正負から波形の対称性をある程度把握できると考えられる。

参考文献 ① K.S.Liu, M.Rosellett and C.Van Atta, Bi-spectral measurement in turbulence, J.F.M., Vol.77, 1976, pp.45~62

② 沢井正英, 石田昭, 二次波峰現象における非線形性の解析, 第1回海講論文集, 1970, pp.47~52

$$\eta = \cos \omega t + 0.2 \cos(2\omega t + \epsilon)$$

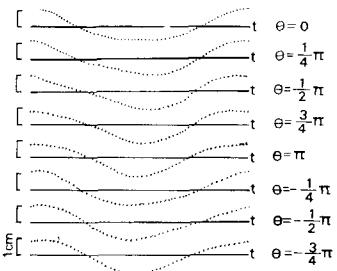


図-2 位相と時間波形

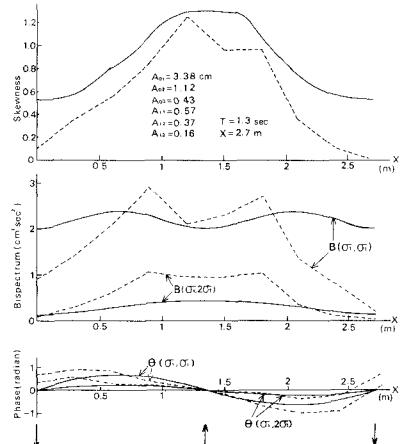


図-3. バイスペクトルの場所的変動

(11)

(12)

(13)

(14)