

1. はしぎき: 前報では, 底質の浮遊機構を説明するには, 波動中における単一粒子の挙動特性を把握する必要があるという観点から, 単一粒子の運動を基礎運動方程式に基づいて考察するための第一歩として, まず基礎式中の Basset 項をはじめ各項の重力項に対する比などを求め, それらの影響の程度を調べた。

本研究では, 前報に引き続いて, 単一粒子の運動をその運動方程式に基づいて考察しようとするもので, ここでは, 特に波動場のポテンシャル波動理論で表現できると仮定した場合の単一粒子の速度や軌跡を, Tchen や Corison & Lumley の式に基づいて求め, 従来の差分法および解析的解法による結果や実験値とも比較し, 波動中における単一粒子の挙動を色々と再度から詳しく調べようとするものである。

2. 基礎方程式とその差分化: (a) Tchen の基礎式に基づく場合: Tchen は速度場が無限領域で一様であるという仮定の下に運動速度 u で運動する流体中での球状個体粒子の運動方程式を前報の式(1)のように示した。

ここでは, その式中の Basset 項を省略し, おつ抵抗係数 C_D と Stokes の抵抗則にならって $C_D = 24\alpha/\text{Re}$ ($\text{Re} = \frac{u_p - u}{\nu}$, α : 任意定数) のように仮定し, さらに, その基礎式を水平および鉛直方向成分に分けて表示すれば, それぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} M \frac{du_p}{dt} = m \frac{du}{dt} - \frac{1}{2} m \left(\frac{du_p}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - 3d\pi\mu d(u_p - u) \dots (1) \\ M \frac{dw_p}{dt} = m \frac{dw}{dt} - \frac{1}{2} m \left(\frac{dw_p}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) - 3d\pi\mu d(w_p - w) - g(M - m) \dots (2) \end{cases}$$

ただし, 上式中の下付 p は fluid, p は particle の特性を示し, M は単一粒子の質量, m はそれと同体積の水粒子の質量, d は粒子の直径, μ は粘性係数を示す。

いま, 時刻 t および $t-1$ の単一粒子の水平および鉛直速度とそれぞれ $(u_p)_t, (u_p)_{t-1}$ および $(w_p)_t, (w_p)_{t-1}$ とし, 式(1), (2)の差分化を行えば, $(u_p)_t$ および $(w_p)_t$ はそれぞれ次のようになる。

$$(u_p)_t = \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(u_p)_{t-1}}{\Delta t} + \frac{3}{2}m \frac{du}{dt} - \frac{3}{2}d\pi\mu d(u_p)_{t-1} + 3d\pi\mu d u}{(M + \frac{1}{2}m)/\Delta t + 1.5d\pi\mu d} \dots (3)$$

$$(w_p)_t = \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(w_p)_{t-1}}{\Delta t} + \frac{3}{2}m \frac{dw}{dt} - \frac{3}{2}d\pi\mu d(w_p)_{t-1} + 3d\pi\mu d w - g(M - m)}{(M + \frac{1}{2}m)/\Delta t + 1.5d\pi\mu d} \dots (4)$$

なお, 上式で $\alpha = 1.0$ とおいた結果が, $\text{Re} \leq 1$ の場合における Tchen の結果になる。

(b) Corison & Lumley の基礎式に基づく場合: Corison & Lumley は, 速度が時空間的に変動する場合の粒子の運動方程式を前報の式(2)のように提案したが, この式中の $(u_p) \frac{\partial(u_p)}{\partial x}$ の (u_p) と水平方向には $(u_p) = u$, 鉛直方向では $(u_p) = w$ と仮定すれば, 水平および鉛直方向の運動方程式は, それぞれ次のように表わされる。

$$\begin{cases} (M + \frac{1}{2}m) \frac{du_p}{dt} = m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(u)}{Dt} - \nu \nabla^2 (u_p) \right\} - 3d\pi\mu d(u_p - u) \dots (5) \\ (M + \frac{1}{2}m) \frac{dw_p}{dt} = m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(w)}{Dt} - \nu \nabla^2 (w_p) + \frac{1}{2} w_p \frac{\partial w_p}{\partial z} \right\} - 3d\pi\mu d(w_p - w) - g(M - m) \dots (6) \end{cases}$$

ここで, $D/Dt = \partial/\partial t + u \partial/\partial x + w \partial/\partial z$, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ である。これらの式(5), (6)と, (a)と全く同様に Δt で差分化すれば, この場合の $(u_p)_t$ および $(w_p)_t$ はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} (u_p)_t &= \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(u_p)_{t-1}}{\Delta t} + m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(u)}{Dt} - \nu \nabla^2 (u_p) \right\} + 3d\pi\mu d u - 1.5d\pi\mu d (u_p)_{t-1}}{(M + \frac{1}{2}m)/\Delta t + 1.5d\pi\mu d} \dots (7) \\ (w_p)_t &= \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(w_p)_{t-1}}{\Delta t} + m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(w)}{Dt} + \frac{1}{2} w_p \frac{\partial w_p}{\partial z} \right\} - 1.5d\pi\mu d w - g(M - m)}{(M + \frac{1}{2}m)/\Delta t + 1.5d\pi\mu d} \\ &\quad - 1.5d\pi\mu d (w_p)_{t-1} / \{ (M + \frac{1}{2}m)/\Delta t + 1.5d\pi\mu d \} \dots (8) \end{aligned}$$

3. 単一粒子の速度・軌跡の計算法: 以上を示した式(3), (4)および式(7), (8)を用いて, 逐次, 単一粒子の速度および軌跡を求めていくのであるが, この場合, 初期条件が必要になってくる。いま, 解析始点として $t=0$ での単一粒子の位置の座標を $(0, z_0)$ とすれば, そのときの単一粒子の水平および鉛直速度 $(u_p)_0, (w_p)_0$ はそれぞれ $(u_p)_0 = \{ \text{Re} \cdot \sinh k(z_0 + z_0) \} / (T \sinh k h) + w_0$ のように仮定でき, これを初期条件として, $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$ ごとに, 逐次単一粒子の速度と位置の座標を求めた。ただし, ここでは, 波動場の速度成分 u, w には, 微小振幅波理論と波速の異なる定義に基づく Stokes 波の異なる近似解の結果を用いた。

4. 解析結果および考察: 図-1(ウ, エ)は, 3. で示した方

法によって、単一粒子の水平速度を α をパラメータとして示したもので、波動場の表現としては、Stokes 波の α の近似解による。図の(1)および(2)は、それぞれ Tchen および Corrison & Lumley の基礎式に基づく場合の結果で、これらの図から明らかなように、 $\alpha=1$ のいわゆる Stokes の抵抗則を用いた場合には、理論と実験値との差異が顕著であるが、 α の値の増大につれてその差異は小さくなり、 $\alpha=4 \sim 5$ のときが、最も両者は合致しており、しかも、Tchen と Corrison & Lumley の式の間の差異もあまり見られないようである。なお、ここでは示していないが、波動理論として微小振幅波理論を用いた場合にも、ほぼ同様な結果が得られているが、実験値との適合性という点では、Stokes 波を用いる場合がより実験値と説明できるようである。一方、図-2(1),(2)は、図-1の場合と全く同じ条件下での鉛直速度成分について示したもので、図の(1)は Tchen の式、(2)は Corrison & Lumley の式に基づく場合の結果である。これらの図から明らかなように、鉛直速度成分の場合にも、全般的には、図-1の場合とほぼ同様な傾向が見られるが、 α の値の変化に対する速度の変化の割合が、水平速度成分のそれに比べて著しいようである。このことは、波動中における単一粒子の運動に作用する抵抗項の役割が、水平方向のそれに比べて鉛直方向がより重要であることを意味しているものと思われる。図-3(1),(2)は、単一粒子の軌跡の理論曲線と実験値とを比較したもので、横軸に解析始点からの距離、縦軸に静水面からの距離として示したものである。図の(1)は、図-1(2)および図-2(2)の場合と全く同じ条件下での Stokes 波による Corrison & Lumley の式に基づく場合の結果を、 α をパラメータとして示したもので、一方、図の(2)は、理論値と実験値との適合性が最もよいと思われる $\alpha=4.0$ の場合の結果を、著者がこれまでに示した差分法および解析的解法に基づく結果や実験値と比較したものである。図の(1)から明らかなように、単一粒子の運動軌跡は、 α の変化によって水平・鉛直の両方向ともかなり変化する、特に鉛直方向の変化が顕著のようである。一方、図の(2)から明らかなように、用いる波動理論によって各理論曲線の傾向は異なるが、同一の波動理論の下では、各曲線はほぼ類似な傾向を示し、この場合には、どちらかと言えば、実験値は解析的解法の結果にかなりよく合致しているが、一般的には、流速の α の定義に基づく Stokes 波による従来の差分法および Corrison & Lumley の式に基づく結果がより実験現象を説明しているようである。最後に本研究と密着した関係にある諸君の著書「波の物理」が、波の物理の分野で最も重要な著書であると、著者の心を込めて推薦する。

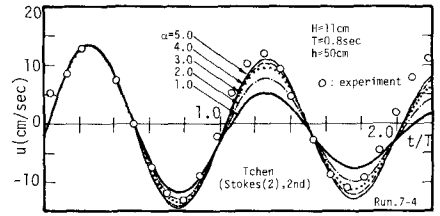


図-1(1) 単一粒子の水平速度 (Tchen の式に基づく場合)

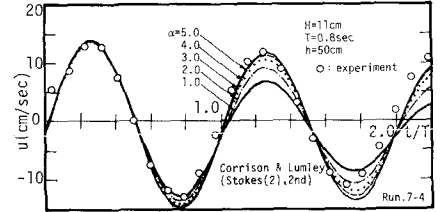


図-1(2) 単一粒子の水平速度 (Corrison & Lumley の式に基づく場合)

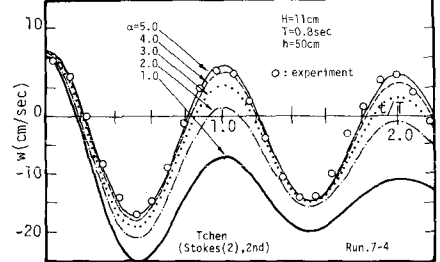


図-2(1) 単一粒子の鉛直速度 (Tchen の式に基づく場合)

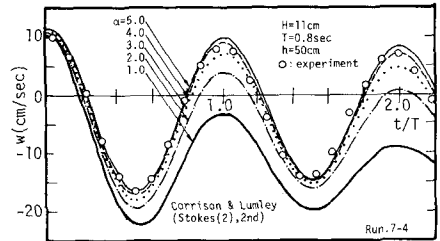


図-2(2) 単一粒子の鉛直速度 (Corrison & Lumley の式に基づく場合)

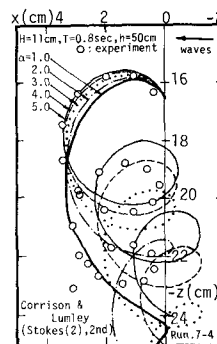


図-3(1) 抵抗項の変化による単一粒子の軌跡の変化

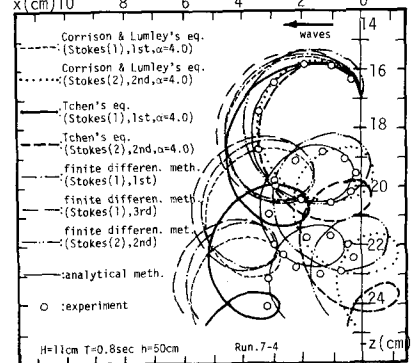


図-3(2) 単一粒子の軌跡に用いる理論値と実験値の比較