

鳥取大学工学部 正員 野田 英明

1. まえがき Longuet-Higgins が底面境界層における質量輸送速度の理論解を求めて以来、数多くの研究者がこの問題と取り組んできた。とくに、Brebner や Collins らは底面境界層における質量輸送速度の実験値と Longuet-Higgins の解とを比較して、波高が大きくなると理論と実験値が一致しなくなることを見出し、これが境界層における層流-乱流の遷移に関係すると考え、その限界 Reynolds 数を求めた。しかしその後、Sleath や堀川らは質量輸送速度の高次近似解を求め、Brebner らの主張がかなりしも妥当でないことを指摘した。高次近似解を導いた Sleath の方法に疑問をもった著者も高次近似解を求める試みをした。ここではその結果について報告する。

2. 質量輸送速度の4次近似解 ここで取り扱う波は一様水深上を進行する進行波であり、底面は滑面とする。底面境界層は層流であって、境界層外縁における水平水粒子速度は有限振幅波の第2近似解を適用する（質量輸送速度の4次近似解を求めようとする場合、境界層外縁の速度は第2近似解で十分である）。すなわち、

$$u_w = \varepsilon U_{w1} + \varepsilon^2 U_{w2} \\ = (H/L)(L/\tau) P_1 \cos \theta + (H/L)^2 (L/\tau) P_2 \cos 2\theta \cdots \cdots (1)$$

である。ここに、 $\theta = kx - \omega t$ 、 $\varepsilon = H/L$ 、 $P_1 = \pi / \sinh kh$ 、 $P_2 = 3\pi^2 / 4 \sinh^4 kh$ 、 $k = 2\pi/L$ 、 $\omega = 2\pi/T$ である。

ここで解析の手順を詳述することは紙面の関係上困難であるが、要するに波動境界層方程式から底面境界層内における水粒子速度の高次近似解を導き、Lagrange 的方法によって質量輸送速度の高次近似解を求めることになる。いま $\delta = \sqrt{\nu T / 2\pi}$ とし、 $\eta = z/\delta$ とすれば、質量輸送速度の4次近似解 $\overline{u}_w$ は形式的に

$$\frac{\overline{u}_w}{C} = \frac{1}{4} \varepsilon^2 P_1^2 F(\eta) + \frac{1}{4} \varepsilon^3 P_1^3 G(\eta) \cos(kx - \theta_3) + \frac{1}{16} \varepsilon^4 [P_1^4 M_1(\eta) + P_1^2 P_2 M_{12}(\eta) + P_2^2 M_2(\eta)] \\ + \frac{1}{16} \varepsilon^4 [P_1^4 N_1(\eta) \cos(2kx + \theta_1) + P_1^2 P_2 N_2(\eta) \cos(2kx + \theta_2)] \cdots \cdots (2)$$

となる。ここに、 C : 波速であり、すなわち

$$F(\eta) = 3e^{-2\eta} - 8e^{-\eta} \cos \eta + 5, \quad G(\eta) = -(G_R^2 + G_I^2)^{1/2}, \quad \theta_3 = \tan^{-1}(G_I/G_R), \\ G_R(\eta) = 8\eta e^{-\eta} (\cos \eta + \sin \eta) - e^{-2\eta} (17 \cos \eta + 4 \sin \eta) - 6\eta e^{-2\eta} + e^{-2\eta} (10 + 8 \cos 2\eta) - 3e^{-3\eta} (2 \cos \eta - \sin \eta) + 5, \\ G_I(\eta) = -e^{-2\eta} (9 \sin \eta + 4 \cos \eta) + e^{-2\eta} (\eta + 8 \sin 2\eta) - 3e^{-3\eta} (\cos \eta + 2 \sin \eta), \\ M_2(\eta) = e^{-\sqrt{2}\eta} \{-32 \cos \sqrt{2}\eta + 16(\sqrt{2}\eta - 1) \sin \sqrt{2}\eta\} + 12e^{-2\sqrt{2}\eta} + 20,$$

となり、 M_1 、 M_{12} 、 N_1 、 N_2 、 θ_1 および θ_2 もそれぞれ η の関数として表わされるが、非常に長い式となるのでここでは省略する。なお式(2)において ε^3 および ε^4 の各項を省略すれば2次近似解となり Longuet-Higgins の解と一致する。また3次近似解は同様に ε^4 の項を省略すればよい。

3 次あるいは4次近似解と2次近似解との著しい相違点は高次近似解が x 方向に変化することである。この物理的意味はつぎのように解釈することができ。すなわち、一つの水粒子に注目し、一周期の間の変位 ξ を考え、 ξ は $\xi = \overline{u}_w \cdot T$ によって与えられる。式(2)の左辺は $\overline{u}_w / C = \xi / L$ であるから、これは変位 ξ の無次元表示にほかならない。したがって、波峰 ($kx = 0$) から測りはじめた一周期の変位 ξ と波谷 ($kx = \pi$) から測りはじめた変位 $\xi + \pi$ とではその値が異なることになる。以上の解釈に対する実証は測定が困難であるため、

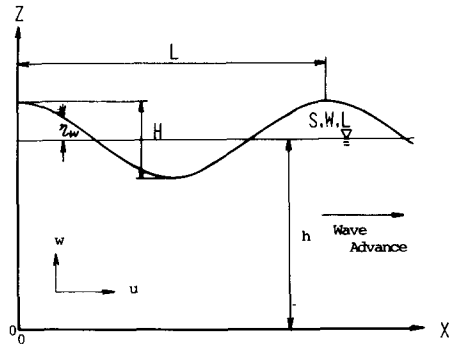


図1 記号の説明

現在のところまだなされていない。

3. 数値計算結果と実験結果 図2 (a), (b) および (c) は、それぞれ $x/L = 0.0, 0.25$ および 0.50 における、 $T = 1.5 \text{ sec}$, $H = 10 \text{ cm}$ の波で、水深 $h = 40 \text{ cm}$ における底面境界層内の質量輸送速度の鉛直分布を、2次、

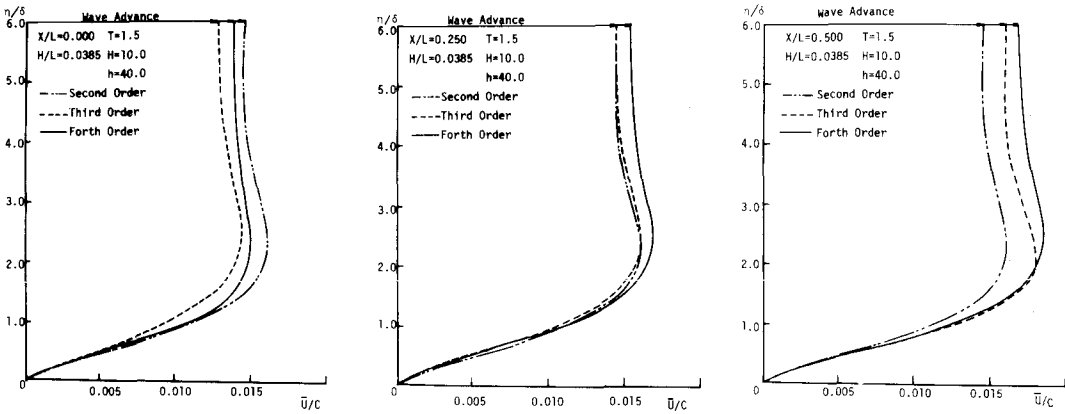


図2 (a) (b) (c)

3次および4次近似解について計算した結果を示している。これらの図から明らかのように $y \leq 1.0$ における鉛直分布は、 $x/L = 0.0, 0.25$ および 0.5 において2次、3次および4次近似解ともそれほど顕著な変化はなくほぼ一致しているが、 $y > 3.0$ の範囲では、 $x/L = 0.0$ の場合、3次および4次近似解が2次近似解より小さい値となっている。一方 $x/L = 0.5$ では逆に高次近似解が2次近似解より大きくなる。図3は Collins が示にしたがって、 $x/L = 0$ (波峰) における境界層外縁の質量輸送速度の2次、3次および4次近似解を並びに Collins および著者の実験結果と比較して示したものである。この図からわかるように、3次および4次近似解は H/L の値が parameter として入ってくる。横軸の値、すなわち $H/\sqrt{T \sinh kh}$ が大きくなると、実験値が2次近似解からはみ出ることで Collins によって指摘されたが、3次および4次近似解は、波形畸変によって若干相違するが2次近似解とはことなり、実験値と同様に2次近似解からはみ出る傾向を示していることがわかる。 $H/\sqrt{T \sinh kh}$ の値をさらに大きくすると破波にいたるので、理論計算は破波にいたるまでとしたが、 $H/\sqrt{T \sinh kh}$ の値が大きくなると、3次近似解が Longuet-Higgins の解とも大きくはみ出る傾向にあり、実験結果の傾向とよく一致するようである。実験値に対する波形畸変の影響はそれらを波形畸変別に表示しなかつたので、現在とこの明確にはなしえない。いずれにしても Collins が示した層流-乱流の遷移限界としての意味は高次近似解を適用するがぎり受当であるとはいえない。

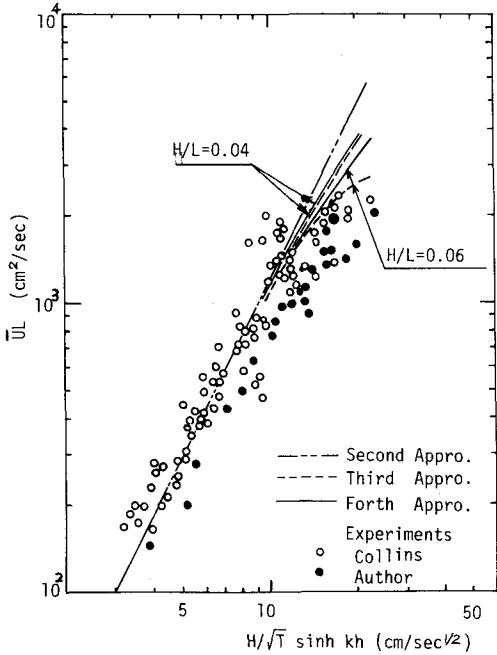


図3

4. まとめ 図3における $H/\sqrt{T \sinh kh}$ の値が大きくなると3次、4次の効果が表われることがわかった。最後

にこの研究は文部省科学研究費(代表者大阪大学教授 榎本亨)による研究の一部であることを付記する。