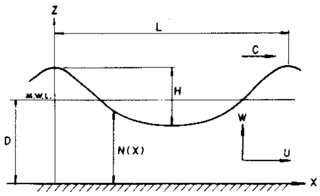
II-394　保存波の摂動解の波高による表示

東京大学　正会員　磯部 雅彦
東京大学　正会員　西村 仁嗣
東京大学　正会員　堀川 清司



ストークス波およびクノイド波の解は多くの研究者によって求められているが、無次元化のための基準量や展開核εが波の諸元と直接結びついていないため、実際の計算に際し、与えられた波の諸元から展開核ε等を求めるために繰り返し計算が必要となるなど不便な点が多い。そこで筆者らはストークス波およびクノイド波の展開核εとしてそれぞれ波形勾配および相対波高をとり、できる限り実際の計算に便利な形で第5次および第3次近似解を求めた。ここではその結果として得られる水面変動N，水平および鉛直方向の水粒子速度UおよびW，圧力Pの表示式を示す。なお、座標系は上図に示した通りであり、波速Cについてはストークスの第2定義によった。

1．ストークス波

$$kN = d+\sum_{n=1}^{5} A_n\cdot\cos n(x-t)\ ,\quad U/C_0 = B_0+\sum_{n=1}^{5} B_n\cdot\cosh nz\cdot\cos n(x-t),\quad W/C_0=\sum_{n=1}^{5} B_n\cdot\sinh nz\cdot\sin n(x-t)$$

ここに、

$$A_1=\varepsilon+\varepsilon^3\frac{3(-9c^6+3c^4-3c^2+1)}{64}+\varepsilon^5\frac{188325c^{16}+203310c^{14}-764046c^{12}-340410c^{10}+53932c^8-6070c^6+14622c^4+2370c^2-225}{12288(5c^2+1)(5c^2+3)}$$

$$A_2=\varepsilon^2\frac{c(3c^2-1)}{4}+\varepsilon^4\frac{c(-324c^8+792c^4-352c^2+12)}{384}$$

$$A_3=\varepsilon^3\frac{3(9c^6-3c^4+3c^2-1)}{64}+\varepsilon^5\frac{-14580c^{14}-7776c^{12}+46980c^{10}-5328c^8+900c^6-1008c^4-180c^2}{4096(5c^2+1)}$$

$$A_4=\varepsilon^4\frac{c(405c^{10}+81c^8+522c^6-262c^4+c^2+21)}{384(5c^2+1)}$$

$$A_5=\varepsilon^5\frac{5(6075c^{16}+8910c^{14}+25866c^{12}-498c^{10}-3896c^8+2618c^6-570c^4-150c^2+45)}{12288(5c^2+1)(5c^2+3)}$$

$$B_0=\varepsilon^2\frac{c}{2d}+\varepsilon^4\frac{c(-9c^6-3c^4-7c^2+3)}{64d}$$

$$B_1=\frac{1}{\sinh d}\left[\varepsilon+\varepsilon^3\frac{-27c^6-3c^4-41c^2+39}{64}+\varepsilon^5\frac{62775c^{16}+89370c^{14}-199602c^{12}-91438c^{10}-131460c^8-75986c^6+30114c^4+12262c^2+861}{4096(5c^2+1)(5c^2+3)}\right]$$

$$B_2=\frac{2}{\sinh 2d}\left[\varepsilon^2\frac{3c(c^2-1)}{4}+\varepsilon^4\frac{c(-162c^8+81c^6+261c^4+19c^2-103)}{192}\right]$$

$$B_3=\frac{3}{\sinh 3d}\left[\varepsilon^3\frac{27c^6-57c^4+17c^2+13}{64}+\varepsilon^5\frac{-3645c^{14}+4131c^{12}+10935c^{10}-7569c^8-6591c^6+1665c^4+1413c^2+173}{1024(5c^2+1)}\right]$$

$$B_4=\frac{4}{\sinh 4d}\left[\varepsilon^4\frac{c(405c^{10}-1269c^8+342c^6+1466c^4-747c^2-197)}{384(5c^2+1)}\right]$$

$$B_5=\frac{5}{\sinh 5d}\left[\varepsilon^5\frac{10125c^{16}-39150c^{14}-16290c^{12}+157690c^{10}-89928c^8-78730c^6+39970c^4+15230c^2+1083}{4096(5c^2+1)(5c^2+3)}\right]$$

$x=kX$, $z=kZ$, $t=\sigma T$, $C_0=\sqrt{(g/k)\tanh d}$, $c=\coth d$, $d=kD$, $\varepsilon=kH/2$, $k=2\pi/L$, $\sigma=2\pi/\tau$, τは周期, gは重力加速度, Tは時刻である。

上の表示式に対し、与えられる波の諸元は水深，波高，および波長あるいは周期である。すなわちkおよびσのうち与えられるのはいずれか一方であり、他方は次に示す分散関係式のいずれかの表示によって求める。

$$\sigma\sqrt{D/g}=\sqrt{d\tanh d}\left[1+\varepsilon^2\left\{\frac{9c^4-10c^2+9}{16}-\frac{c}{2d}\right\}+\varepsilon^4\left\{\frac{-405c^{10}-117c^8+2454c^6-2194c^4+351c^2+39}{1024}-\frac{c(-9c^6-3c^4-7c^2+3)}{64d}\right\}\right]$$

又は　$d=kD=d_0+\varepsilon^2 d_2+\varepsilon^4 d_4$，ただし　$d_0\tanh d_0=\sigma^2 D/g$，$d_2=-f_3/f_1$，$d_4=-(f_2 d_2^2+f_4 d_2-f_3^2+c_4)/f_1$

$$C_0=\coth d_0,\quad f_1=\frac{C_0+d_0(C_0^2-1)}{2d_0C_0},\quad f_2=\frac{-C_0^2+2d_0C_0(C_0^2-1)-d_0^2(C_0^2+3)(C_0^2-1)}{8d_0^2C_0^2},\quad f_3=\frac{9C_0^4-10C_0^2+9}{16}-\frac{C_0}{2d_0}$$

$$f_4=\frac{-C_0^2(C_0^2-1)(9C_0^2-5)}{4}+\frac{C_0+d_0(C_0^2-1)}{2d_0^2},\quad C_4=\frac{-405C_0^{10}-117C_0^8+2454C_0^6-2194C_0^4+351C_0^2+39}{1024}-\frac{C_0(-9C_0^6-3C_0^4-7C_0^2+3)}{64d_0}$$

2. クノイド波

$$N/D=\sum_{n=0}^{3}A_n C_n,\quad U/\sqrt{gD}=\sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{2}B_{nm}z^{2m}C_n,\quad W/\sqrt{gD}=csd\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=0}^{2}\frac{4nKd}{2m+1}B_{nm}z^{2m+1}C_{n-1},$$

$$P/\rho gD=(N/D-z)+\sum_{n=0}^{3}\sum_{m=1}^{2}P_{nm}(z^{2m}-1)C_n+\sum_{n=0}^{3}P_{n0}C_n$$

ここに、$C_n=cn^{2n}(x-t,\kappa)$, $csd=cn(x-t,\kappa)\cdot sn(x-t,\kappa)\cdot dn(x-t,\kappa)$,

$$A_0=1+\varepsilon(\lambda-\mu)+\varepsilon^2(-2\lambda+\mu-2\lambda^2+2\lambda\mu)/4+\varepsilon^3(133\lambda-16\mu+399\lambda^2-466\lambda\mu+100\mu^2+266\lambda^3-466\lambda^2\mu+200\lambda\mu^2)/400,$$

$$A_1=\varepsilon+\varepsilon^2(-3/4)+\varepsilon^3(50-\lambda-60\mu)/80,\quad A_2=\varepsilon^2(3/4)+\varepsilon^3(-151+\lambda+60\mu)/80,\quad A_3=\varepsilon^3(101/80),$$

$$B_{00}=\varepsilon(\lambda-\mu)+\varepsilon^2(\lambda-\mu-2\lambda^2+2\mu^2)/4+\varepsilon^3(-71\lambda+47\mu-23\lambda^2+97\lambda\mu-50\mu^2+153\lambda^3-153\lambda^2\mu-25\lambda\mu^2+25\mu^3)/200,$$

$$B_{01}=\varepsilon^2(-3\lambda/4)+\varepsilon^3(6\lambda+24\lambda^2-21\lambda\mu)/8,\quad B_{02}=\varepsilon^3(3\lambda-3\lambda^2)/16,$$

$$B_{10}=\varepsilon+\varepsilon^2(1-6\lambda+2\mu)/4+\varepsilon^3(-19-27\lambda+10\mu+101\lambda^2-100\lambda\mu+15\mu^2)/40,$$

$$B_{11}=\varepsilon^2(-3+3\lambda)/2+\varepsilon^3(6+36\lambda-21\mu-24\lambda^2+21\lambda\mu)/4,\quad B_{12}=\varepsilon^3(6-39\lambda+6\lambda^2)/16,$$

$$B_{20}=\varepsilon^2(-1)+\varepsilon^3(-2+32\lambda-15\mu)/10,\quad B_{21}=\varepsilon^2(9/4)+\varepsilon^3(30-120\lambda+63\mu)/8,\quad B_{22}=\varepsilon^3(-45+45\lambda)/16,$$

$$B_{30}=\varepsilon^3(6/5),\quad B_{31}=\varepsilon^3(-15/2),\quad B_{32}=\varepsilon^3(45/16),$$

$$P_{00}=\varepsilon^3(3\lambda^2-3\lambda\mu)/2,\quad P_{01}=\varepsilon^2(-3\lambda/4)+\varepsilon^3(3\lambda+24\lambda^2-18\lambda\mu)/8,\quad P_{02}=\varepsilon^3(3\lambda-3\lambda^2)/16,$$

$$P_{10}=\varepsilon^3(9\lambda-6\mu-6\lambda^2+6\lambda\mu)/2,\quad P_{11}=\varepsilon^2(-3+3\lambda)/2+\varepsilon^3(3+36\lambda-18\mu-24\lambda^2+18\lambda\mu)/4,\quad P_{12}=\varepsilon^3(6-39\lambda+6\lambda^2)/16,$$

$$P_{20}=\varepsilon^3(6-15\lambda+9\mu)/2,\quad P_{21}=\varepsilon^2(9/4)+\varepsilon^3(39-120\lambda+54\mu)/8,\quad P_{22}=\varepsilon^3(-45+45\lambda)/16,$$

$$P_{30}=\varepsilon^3(-9/2),\quad P_{31}=\varepsilon^3(-33/4),\quad P_{32}=\varepsilon^3(45/16),$$

$x=\alpha X$, $z=Z/D$, $t=\beta T$, $\varepsilon=H/D$, $d=D/L$, $\lambda=(1-\kappa^2)/\kappa^2$, $\mu=E/\kappa^2K$, $\alpha=2K/L$, $\beta=2K/\tau$, K, Eはそれぞれ第1種, 第2種の完全楕円積分, κはその母数, τは周期, ρは流体の密度, gは重力加速度, Tは時刻である。

上の表示式中、母数κは次のいずれかの式を解くことにより決定される。

$$(D/L)^2=(3/16\kappa^2K^2)(H/D)[1+(H/D)(-5-10\lambda+12\mu)/4+(H/D)^2(12+45\lambda-46\mu+45\lambda^2-92\lambda\mu+48\mu^2)/8]$$

$$(D/g\tau^2)=(3/16\kappa^2K^2)(H/D)[1+(H/D)(-1-2\lambda)/4+(H/D)^2(8+33\lambda-10\mu+33\lambda^2-20\lambda\mu)/40]$$

ここで、クノイド波理論が適用されるのは少なくともアーセル数が10以上の場合であり、このとき$\kappa^2>0.5$となることから、上式を実際に解くには補ノルム$\bar{q}$を経由するとよい。すなわち、6桁の精度の範囲なら、

$$2\kappa K=(T_3)^2\log(1/\bar{q}),\quad \kappa=(T_2/T_3)^2,\quad \lambda=16\bar{q}(T_4/T_2)^4,\quad \mu=\{2/\log(1/\bar{q})+(T_3)^4-S\}/(T_2)^4,$$

$$T_2=1-2\bar{q}+2\bar{q}^4,\quad T_3=1+2\bar{q}-2\bar{q}^4,\quad T_4=1+\bar{q}^2+\bar{q}^6,\quad S=1+8\bar{q}^2-8\bar{q}^4$$

であることを利用して、

$$\log(1/\bar{q}^{(i+1)})=(1/T_2)^2\sqrt{3U_r/4\,[1+(H/D)(-5-10\lambda+12\mu)/4+(H/D)^2(12+45\lambda-46\mu+45\lambda^2-92\lambda\mu+48\mu^2)/8]}\,\Big|_{\bar{q}=\bar{q}^{(i)}}$$

$$\log(1/\bar{q}^{(0)})=\sqrt{3U_r/4},\quad U_r=HL^2/D^3$$

又は

$$\log(1/\bar{q}^{(i+1)})=(1/T_2)^2\sqrt{3U_r'/4\,[1+(H/D)(-1-2\lambda)/4+(H/D)^2(8+33\lambda-10\mu+33\lambda^2-20\lambda\mu)/40]}\,\Big|_{\bar{q}=\bar{q}^{(i)}}$$

$$\log(1/\bar{q}^{(0)})=\sqrt{3U_r'/4},\quad U_r'=gH\tau^2/D^2$$

なる繰り返し計算を行なえば、2～10回の反復で$\log(1/\bar{q})$について4桁の精度が得られる。

波長あるいは周期、つまりαあるいはβが与えられたとき、与えられない方のパラメータを求めるためには、ストークス波の場合と同様、次の分散関係式を用いる。

$$\beta/\alpha\sqrt{gD}=1+\varepsilon(1+2\lambda-3\mu)/2+\varepsilon^2(-6-16\lambda+5\mu-16\lambda^2+10\lambda\mu+15\mu^2)/40$$
$$+\varepsilon^3(150+1079\lambda-203\mu+2337\lambda^2-2653\lambda\mu+350\mu^2+1558\lambda^3-2653\lambda^2\mu+700\lambda\mu^2+175\mu^3)/2800$$

以上により、水深・波高・波長あるいは水深・波高・周期が与えられた場合の波の諸性質の計算が単純化される。