

東京大学大学院 学生員 河面 基
 東京大学工学部 正員 玉井 信行

1. まえがき

著者らの洪水追跡に関するこれまでの検討により、洪水継続期間にわたり一定の粗度係数を用いる従来の考え方では、水路幅の変化による堰上げ効果などを十分に表現し得ないことが認識された。本論文においては、水路方向に一樣な開水路における速度分布あるいは粗度係数について論じた *Hague*²⁾、高橋³⁾の理論を拡張して、水路幅が直線的に変化する開水路における水深に応じた粗度係数の変化について動水勾配の影響も区分的に考慮した理論を展開し、水路幅あるいは水深の変化による速度分布や粗度係数の変化の数値例を示した。

2. 理論

流れの場の模式図を図-1に示す。流速の水路床に垂直な成分は無視し、流線は側壁に沿って放射状と仮定する。従って、定常流れを扱うことにすれば、連続の方程式および *Boussinesq* の渦動粘性係数 ε を導入した *Reynolds* の運動方程式は曲線座標表示でそれぞれ次式となる。

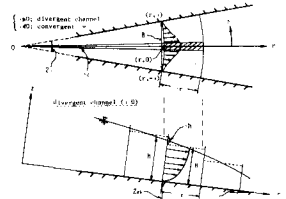


図-1 流れの場

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0 & \text{----- (1)} \\ v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (z_b + h \cos \theta) + (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) & \text{----- (2)} \end{cases}$$

ここに、 g : 重力の加速度、 z_b : 水路床の高さ、 h : 水深、 v_r : r 方向の流速、 $\tan \theta$: 水路床勾配、 ν : 動粘性係数である。本論文では、図-1のように対象の横査断面間 δr においては水深が平均的な一定値 H をとり、この為圧力勾配は区分的な圧力差 δh が外力として作用すると仮定する。そこで、動水勾配 $I \equiv -\partial(z_b + h \cos \theta) / \partial r$ を用いて、式(2)の右辺第2項は gI と書き換えられて外力項として取扱う。また、 $\varepsilon \gg \nu$ と一般におけるので、以下では ν を無視できるものとし、式(1)の関係を式(2)に用いると次式が得られる。

$$\varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{v_r^2}{r} + gI = 0 \quad \text{----- (3)}$$

次に、 z 方向の速度分布としては対数則が満足されるとし、さらに ϕ 方向には速度分布が相似であると仮定し、さらに式(3)の左辺の第1, 2項の ε を各々の方向に応じた渦動粘性係数 ε_ϕ , ε_z と書き換えて $z=0 \sim H$ の範囲で積分を行なう。ここで、対数速度分布を仮定した z 方向に対して平均流速 $\bar{u}$ (以後、 v_r を u と書き改める。)を求めると次式で書き表わせる。

$$\bar{u}/u_* = (F/\kappa) \{ \ln(M_1 H) - 1 \} \quad , \quad \langle \text{滑面水路の場合: } M_1 = 9 u_* / \nu \rangle \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 F : ϕ 方向の分布関数、 κ : カルマン定数、 u_* : 摩擦速度である。一方、 ϕ 方向の渦動粘性係数 ε_ϕ は次元を考慮して式(5)の形で表わせるものと仮定し、また定義式(6)

$$\varepsilon_\phi = \ell \ell \bar{u} \quad , \quad \langle \ell: \text{プラントルの混合距離(一定)}, \ell: \text{比例定数} \rangle \quad \text{----- (5)}$$

$$f \equiv \kappa^2 / \{ \ln(M_1 H) - 1 \}^2 \quad , \quad \langle f: \text{底面での摩擦係数に相当する} \rangle \quad \text{----- (6)}$$

を用いることにより、結局、微分方程式(3)は次式で表わされる $\bar{u}^2$ に関する微分方程式に帰着する。

$$\frac{d^2 \bar{u}^2}{d\phi^2} - \frac{B^2}{2 \ell \ell d^2 H} \left\{ f - \frac{2 \alpha H}{B} \left(1 + \frac{f}{\kappa^2} \right) \right\} \bar{u}^2 = - \frac{g B^2 I}{2 \ell \ell d^2} \quad \text{----- (7)}$$

ここに、 α は水路の拡がりあるいは狭まり半角であり、 $r \doteq B/(2\alpha)$ の関係を用いている。

この微分方程式を両側壁において *no-slip* の境界条件で解く。得られる解は、 α あるいは式(7)の左辺第2

項における $\bar{u}^2$ の係数の正負によっていくつかの場合について求められるが、ここでは紙面の都合により $\alpha < 0$ あるいは $0 < \alpha < Bf/(1+f/\kappa^2)/(2H)$ の場合における結果のみを掲げる。まず、 x 方向に平均化した流速 $\bar{u}$ に関する ϕ 方向の速度分布式は次式となる。

$$\bar{u}(\phi) = \sqrt{\frac{gIH}{\xi}} \left[1 - \frac{\cosh(P\phi)}{\cosh(P\alpha)} \right]^{1/2} \quad \text{---- (8)}, \quad \text{ここに} \quad \begin{cases} \xi = f - 2\alpha H(1+f/\kappa^2)/B \\ P = \sqrt{B^2 \xi / (2\ell \ell \alpha^2 H)} \end{cases} \quad \text{--- (9)}$$

さらに、断面平均流速 V は断面の中心線方向のベクトルと考え、式(8)に $\cos\phi$ を掛けて $\phi = -\alpha \sim \alpha$ の範囲で近似計算を用いて積分を実行した結果として、次式のように求められる。

$$V \simeq \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{gIH}{\xi}} \left\{ \left[1 - \frac{S^2}{16} - \frac{15S^4}{1024} \right] \sin\alpha - \frac{S}{2(P^2+1)} \left\{ 1 + \frac{3S^2}{32} \right\} \left[\cosh(P\alpha) \sin\alpha + P \sinh(P\alpha) \cos\alpha \right] \right. \\ \left. - \frac{S^2}{16(4P^2+1)} \left\{ 1 + \frac{5S^2}{16} \right\} \left[\cosh(2P\alpha) \sin\alpha + 2P \sinh(2P\alpha) \cos\alpha \right] - \frac{S^4}{64(9P^2+1)} \left[\cosh(3P\alpha) \sin\alpha + 3P \sinh(3P\alpha) \cos\alpha \right] \right. \\ \left. - \frac{5S^4}{1024(16P^2+1)} \left[\cosh(4P\alpha) \sin\alpha + 4P \sinh(4P\alpha) \cos\alpha \right] \right\} \equiv U \cdot M(P\alpha), \quad \left\langle S = \frac{1}{\cosh(P\alpha)} \right\rangle \quad \text{---- (10)}$$

ここに、 $U = \sqrt{gIH}/f$ であり、動水勾配 I および水深 H に対する二次元流速に相当する。

式(10)を Manning の式に代入すると、粗度係数 n は次式で書き表わすことができる。

$$n = n_0 / M(P\alpha) \quad \text{---- (11)}$$

ここに、 n_0 は二次元流に対する粗度係数であり、 $1/M(P\alpha)$ は粗度係数の修正係数となっている。ただし、以上の議論においては定数 ℓ, ℓ の値が与えられていることが必要であり、ここでは一応次のように考えておく。

$$\ell = H \quad \text{---- (12)}, \quad \ell = \sqrt{v'^2/\bar{u}} \quad \text{---- (13)}$$

ここに、 $|v'| = \ell \cdot d\bar{u}/d\phi$, v' : ϕ 方向の流速変動

3. 結果と考察

簡単な計算例として、 α を変化させた場合の ϕ 方向の速度分布を図-2に、また水面勾配と α をパラメータとして怪深 R の変化に対応する粗度係数の修正係数 n/n_0 の変化を図-3に示した。計算に用いた定数値は、 $\nu = 0.114 \times 10^{-5} \text{ (m}^2/\text{s)}$, $\kappa = 0.4$, $\ell = 0.05$ であり、水路幅 $B = 1 \text{ (m)}$ とした。

図-2においては、流路が狭まるにつれて流路中央部の流速は一様化の傾向を示し、逆に拡がる場合では側壁付近の速度は減少して、流路中央部の速度は大きくなる。そして、 α が0.1付近より大きくなると流れは壁面から離れて逆流を生じるようになり、Nikuradse⁴⁾の実験結果と定性的にほぼ一致した結果が示された。一方、図-3では流路の狭まる場合において狭まり角あるいは怪深の増大につれて n/n_0 が増大する傾向が示され、また拡がる場合においては、この修正係数の値が狭まる場合のそれよりも小さく、また怪深による変化の様子も前者の場合に比較して単調ではない傾向が示されている。

以上、従来の一樣幅水路における水深に於いた粗度係数の変化に関する議論³⁾に対して、さらに水路幅の変化の効果をも考慮した取扱いが可能となり、今後の洪水追跡問題における粗度係数評価の基礎としたい。

<参考文献> 1) 玉井信行・河面基：“河道狭窄部が洪水波形に及ぼす影響について”，第22回水講，1978。 2) Hague, M.A.: “The effect of eddy viscosity on the velocity profile of steady flow in a uniform rough channel”, Journ. of Fluid Mech., Vol.5, 1959。 3) 高橋保：“河道における洪水流の特性に関する研究”，京都大学学位論文，1971。 4) Nikuradse, J.: “Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen”, Forschungsarbeiten der VDI, No. 289, 1929。

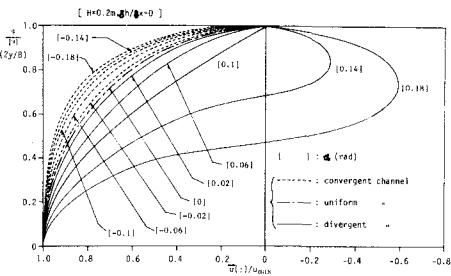


図-2 流速分布 (ϕ 方向)

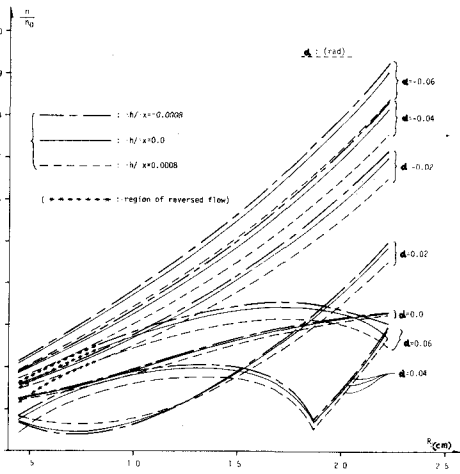


図-3 粗度係数の変化