II-316　鉛直流を考慮した井戸への非定常流の一次解

東海大学工学部　正員　○星田 義治
東海大学工学部　正員　市川 勉
東海大学工学部　学生員　前原 弘光

1. まえがき　自由水面を有する帯水層では、井戸への非定常流の基礎式は、一般に非線形になる。したがって，井戸の水位降下の小さいときは、平行流（準一様流）の仮定を用いて，基礎式を線形化して線形解が得られる。また、この平行流の仮定を用いた二次元の非線形基礎式の非線解と比較して，この両者は，水位降下率（水位降下量／初期帯水層厚）が10%ぐらいまでは大体一致することを発表している[1)]。さらに、この非線形基礎式に井戸内の連続条件を考慮した式を用いると、揚水開始直後の水位の時間的変化をより詳しく評価出来る。これらの式に、井戸における運動方程式（井戸枠の抵抗を考慮した式）を加えた解では、水位降下率が40%ぐらいまで適用可能である[2)]。すなわち、自由水面を有する帯水層から井戸で揚水するとき用いられた準一様流の仮定は、このくらいが限界であると思われる。したがって，水位降下がさらに大きくなると、井戸近傍での鉛直流の影響が卓越して来て，準一様流の仮定で作られている基礎式では、井戸近傍における地下水流の物理性を十分に表現出来なくなる。本文では、この意味から鉛直流を考慮した三次元の基礎式の一次解を求めて、鉛直流の影響についてのいくらかの知見を得たので報告する。

2. 理論　図-1のような不圧帯水層における揚水を考える。ここに、Q_0：一定揚水量、r_0：井戸の半径　r：井戸の中心より任意地点までの距離、H：揚水前の帯水層の厚さ、h，s：井戸の中心からrの距離の水位および水位降下量、u，w：水平および鉛直方向の流速

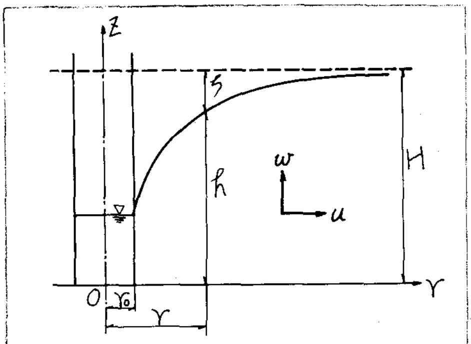

図-1 不圧帯水層における揚水

2-1　帯水層内の基礎式　流れの場は、軸対称でダルシーの法則に従うものとし、帯水層は均質・等方であるとする。

運動方程式　$u=-\frac{1}{\rho\alpha}\frac{\partial p}{\partial r}$ ----①　$w=-\frac{g}{\alpha}-\frac{1}{\rho\alpha}\frac{\partial p}{\partial z}$ ----②

ここに，p：帯水層内の圧力、α：流速に比例する抵抗係数，g：重力の加速度，ρ：水の密度

連続方程式　$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ ----③

2-2　初期および境界条件　$t\leq 0$，$h=H$，$u=w=0$，$p=\rho g(H-z)$ ----④

$t>0$，$r=r_0$，$Q_0=-\int_0^h 2\pi r u\,dz$（一定）----⑤，$r\to\infty$，$h=H$，$u=w=0$，$p=\rho g(H-z)$ ----⑥

$z=0$，$w=0$ ----⑦　$z=h$，$\beta\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial r}=w$ ----⑧　$p=0$ ----⑨　ここで，β：有効空隙率

ここで、$k=\frac{g}{\alpha}$ ----⑩

2-3　無次元化　$r'=\frac{r}{r_0}$，$z'=\frac{z}{H}$，$t'=\frac{gt}{\alpha\beta H}$，$h'=\frac{h}{H}$，$r_0'=\frac{r_0}{H}$ ----⑪

2-4　線形化　$p=\rho gH(1-z')+\rho gH\varphi(r',z',t')$ ----⑫

$\varphi(r',z',t')=\varepsilon\varphi_1(r',z',t')+\varepsilon^2\varphi_2(r',z',t')+\cdots$ ----⑬　$h'(r',t')=1+\varepsilon h_1'(r',t')+\varepsilon^2 h_2'(r',t')+\cdots$ ----⑭ とおき，u，w の $z=h'$ における値は $z'=1$ のまわりのテイラー展開[3)]によって、$z=1$ における値におきかえる。これによって，基礎および条件式はすべて，ε，ε^2，…ごとに線形化される。

ここに，$\varepsilon=\frac{Q_0}{2\pi kH^2}$ ----⑮ である。線形化された式をεオーダについて示すと次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'}\frac{\partial \varphi}{\partial r'} + r_0'^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0 \quad \cdots\cdots (16\text{-}1) \qquad \frac{\partial h'}{\partial t'} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z'}\right)_1 = 0 \quad \cdots\cdots (16\text{-}2) \qquad h'(r', t') = \varphi_1(r', 1, t') \quad \cdots\cdots (16\text{-}3)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z'}\right)_0 = 0 \quad \cdots\cdots (16\text{-}4) \qquad r \to \infty,\ h_1' = \varphi_1 = 0,\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r'} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad \cdots\cdots (16\text{-}5) \qquad r' = 1,\ \int_0^1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r'}\right) dz' = 1 \quad \cdots\cdots (16\text{-}6)$$

2－5　一次解（ε オーダの解）　分離定数を μ として，$\varphi_1(r', z', t') = \psi_1(r', t') \cosh \mu z$ を一つの素解とし、$\mu > 0$ のすべての値が解と境界条件を満たすので、$\mu > 0$ のすべての値を固有値とみることが出来る。したがって、$\mu = 0 \sim \infty$ で積分したものも解となる。求められた解は次のようになる。

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} W_1(\eta - \eta_1, z) \quad \cdots\cdots (17) \qquad h_1' = -\frac{1}{2} W_1(\eta - \eta_1, 1) \quad \cdots\cdots (18)$$

ここに，$W_1(\eta - \eta_1, z)$ は鉛直流を考慮した１次解における井戸関数であり、その値は次のようになる。

$$W_1(\eta - \eta_1, z) = \int_\eta^\infty \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\infty \frac{\mu e^{-\mu} \cosh \mu z}{\sinh \mu} e^{-\sigma(\xi - \eta_1)} d\mu \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\eta = \frac{r'^2 r_0'^2}{4t'} \quad \cdots\cdots (20) \qquad \eta_1 = \frac{r_0'^2}{4t'} \quad \cdots\cdots (21) \qquad \sigma = \frac{\mu}{\tanh \mu} \quad \cdots\cdots (22)$$

水位降下を $s' = \frac{s}{H} = 1 - h'$ とすると，鉛直流を考慮した一次解における水位の時間的空間的変動を示す式は次のように表わされる。

$$s' = \frac{Q_0}{4\pi k H} W_1(\eta - \eta_1, 1) \quad \cdots\cdots (23)$$

2－6　鉛直流を考慮した一次解と準一様流の仮定による解の比較

鉛直流を考慮した一次解による井戸関数 $W_1(\eta - \eta_1, 1)$ と準一様流の仮定による井戸関数（サイスの解）$W(\eta)$ は図-2 に示したように、η の大きい値に対しては、値が近づいている。

図－3 は、準一様流の仮定を用いた基礎式の線形解（サイス），非線形解[1]，鉛直流を考慮した一次解による水位の時間的・空間的変動を示したものである。

3.　あとがき　鉛直流を考慮した一次解は、水位降下が10％程度のときは、サイスの解に大体一致することがわかる。また水位降下率 s' が $0.1 < s' < 0.6$ ぐらいの範囲では準一様流の仮定による非線形解と鉛直流を考慮した一次解は比較的似た値を示している。

しかし，s' がさらに大きくなり、$s' > 0.6$ ぐらいでは，準一様流の仮定を用いた非線形解は、井戸近傍で過大な水位降下量を与えている。（実験より確認している。[4]）これにくらべ鉛直流を考慮した一次解の値が実験値に近づいている。

このことは、水位降下がある程度大きくなると鉛直流の影響が卓越してくることを示している。この定量的評価については、二次解を求めて検討したい。

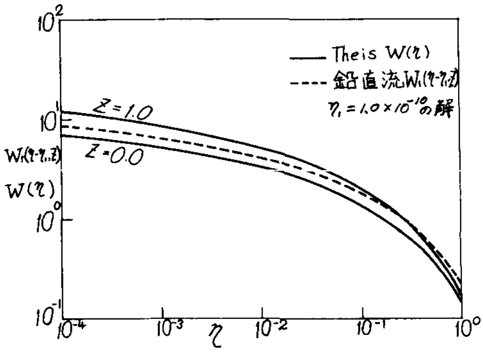

図-2 平行流および鉛直流の井戸関数

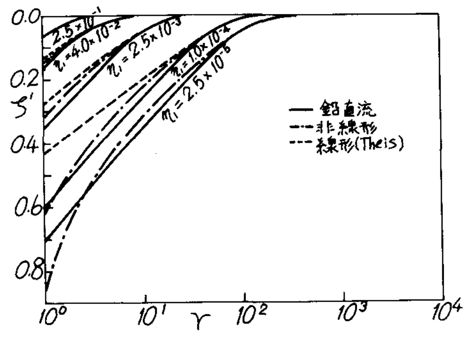

図-3 平行流および鉛直流の解による水位

参考文献

1），2），4）　里田・濱野・市川：東海大学工学部紀要，1975-2，P73～93，1977-1，P129-131，1977-2 P133-141

3）　Milton Van Dyke : Perturbation Method in Fluid Mechanics，P45～48