II-300　粒子流の流動式

立命館大学理工学部　正員　大同淳之

1 はしがき

著者は、従来より，水を伴う粒子流の流動実験を行ない，例えばほぼ定常とみなされる粒子流の流速分布，平均流速等について若干の成果を得てきた[1]。しかしながら従来提案してきた関係式は，流体とほぼ同じ取扱いであって，粒子流のもつ特性例えば，せん断降伏値の存在が粒子流の挙動にどのような影響を与えているかについては，必ずしも明確でない。開水路で粒子流の流動を行なうと，流体とは違った挙動が観察され，両者に明らかな差異があることを知らされる。

この違いを明確にするためには、粒子流に最も適切な応力とひずみ速度の関係を明確にし，釣合い方程式をとくことが必要である。しかし厳密な取扱いは困難である．本報は，この方面の研究の第1歩として，極めて単純化して開水路内の平均流についての式を求め，実験による観察結果と比較して，その妥当性を検討しようとするものである．ここでは，水を伴う粒子流を取扱うものとする。

2. 粒子流の流動式

粒状体の流動は，明らかに不連続体の流れである。その流動は，内部の相対的なスベり，局部の粒子の変形あるいは回転によって行なわれる。粒径が流動深さに対して相対的に大きいときは，個々の粒子の動きは識別され，粒子の回転が重要になる。しかし，粒子径が小さいとき，粒子の運動を区別することは困難で，そこでは連続体としての取扱いが可能になる。

特定の境界内の粒子の応力は，塑性状態にあるとすることができる。塑性領域内では降伏条件を満足し，粒子はまさつ力および付着力を有し，降伏あるいは流動時には膨張が生じるものとする．

i) 水を伴う粒子流のせん断応力とひずみ速度との関係の測定

著者らは，上記流れのせん断応力とひずみ速度の関係を，二重円筒式せん断装置で測定した。その結果によると，

$$\tau=\tau_y+\mu_B(du/dz)\ ,\quad Re<2000\ ,\quad Re=\lambda^{1/2}\rho D^2(du/dz)/\mu \tag{1}$$
$$\tau=\tau_y+\mu_B(du/dz)^m,\quad Re>2000\ ,$$

また，法線方向力 p については

$$p=p_i+\alpha(D\cdot du/dz)^m \tag{2}$$

の結果を得ている．ここに τ_y ＝せん断降伏値，μ_B＝塑性粘度，p_i＝初期法線力，D＝粒径．α，m＝定数である．この式を水を伴う開水路の粒子流に適用して，流速分布としては，

$$\frac{u}{u_*}=\frac{2}{3}(K\sin\alpha)^{-1/2}\psi^{1/2}\left\{\left(1-\frac{\beta D}{h}\right)^{3/2}-\left(1-\frac{z}{h}\right)^{3/2}\right\}+\frac{u_b}{u_*} \tag{3}$$

ここに u_*＝まさつ速度，h＝流動深，β＝速度零の位置の補正，u_b＝βD における速度　K＝係数，また平均流速 u_m は，$u_m/u_*\psi^{1/2}=(2/5)(K\sin\alpha)^{-1/2}(h/D)$　(4)

が，かなり広い範囲の実験に対して成立することが見出されている。

ii) 水を伴う粒子流の基礎式

一般に，有限変形の弾性体の応力 p_{rs} とひずみ e_{rs} の関係は，微小変形の項に $4\mu_c e_{r\alpha}e_{rs}$ を加えて

$$p_{rs}=\lambda e_{\alpha\alpha}\delta_{rs}+2\mu e_{rs}+4\mu_c e_{r\alpha}e_{rs} \tag{5}$$

と表される．ここに，λとμ はラメ常数，δ_{rs} はクロネッカーのデルタ．μ_c は交叉弾性率と呼ばれる．粒子流に対しては，粘性流体に対して行なわれているように，$e_{\alpha\alpha}$ は零とし，静水圧 p，せん断降伏値 τ_y を導

入し，e_{rs} はひずみ速度に変えるものとすると，

$$p_{rs} = -p\delta_{rs} + 2\mu\dot{e}_{rs} + 4\eta_c\,\dot{e}_{rd}\cdot\dot{e}_{rs} + \tau_y \qquad (6)$$

と表わすことができよう。η_c は法線効果率 と名付けられる。

そこで，$u = f(x \cdot z)$，　$v = 0$，　$w = 0$ の流れについて，

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu(\partial u/\partial x) + \mu(\partial u/\partial x)^2 + \eta_c(\partial u/\partial z)^2 \\ p_{zz} &= -p + \mu(\partial u/\partial z)^2 + \eta_c(\partial u/\partial z)^4 \\ p_{yy} &= -p \\ p_{zx} &= \tau_y + \mu(\partial u/\partial z) + \eta_c(\partial u/\partial z)^3 \\ p_{zy} &= p_{zx} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

となる。(7)式は，従来の，流体要素の応力とひずみ速度の関係，$p_{xx} = -p + \mu(\partial u/\partial x)$ に，$\mu(\partial u/\partial x)^2$ および $\eta_c(\partial u/\partial z)^2$ の法線応力が加わったものである。$(\partial u/\partial x)^2$ および $(\partial u/\partial z)$ の2乗以上の項は小さいとして省略すると，

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu(\partial u/\partial x) + \eta_c(\partial u/\partial z)^2 \\ p_{zx} &= \tau_y + \mu(\partial u/\partial z) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

となる。

iii) 開水路断面における平均量としての表現

二次元流れの式は，つぎのとおりである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \qquad (9)$$

(9)式に(8)式を代入すると，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\eta_c}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \qquad (10)$$

となる。すなわち，粘性流体の式に，法線応力の項が加えられたものである。開水路の断面に適用するため，

$$\int_A \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\} dA = -\tau_0 S \qquad (11)$$

とおくと，(10)式は，

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(U_m A) + \rho\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_m U_m^2 A) = -\tau_0 S + \rho g A \sin i - \rho g A\frac{\partial h}{\partial x}\cos i + \frac{\partial}{\partial x}\int_{Ae}\eta_c\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dA \qquad (12)$$

ここに Ae は，せん断応力てが，τ_y 以上の大きさである部分の面積である。右辺中4項を除くと，開水路の水流の運動方程式である。水を伴う粒子流では，(3)式より

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \frac{g\sin\theta\,\psi}{Kd^2\sin\alpha}(h-y) \qquad (13)$$

より

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{Ae}\eta_c\left(\frac{du}{dz}\right)^2 dA = B\eta_c\frac{g\sin\theta\cdot\psi h}{Kd^2\sin\alpha}\frac{dh}{dx} \qquad (14)$$

ここに B は流路幅は一定とし，降伏値の生ずる高さ y_y は流れの表面に近いと仮定した。(12)式中の法線応力の効果の部分を(14)式のように表わしたとき，dh/dx が正のとき，まさつこう配と逆の符号をもち，dh/dx が負のとき，まさつこう配と同じように働くといえる。問題は η_c の大きさであって，これの大きさが何によって関係づけられ，どれ位の大きさを持つかは，(12)式の適用性と合せて，講演時に報告する。

1) 大同淳之．水を伴う粒子流の流動特性　土木学会水理講演会講演集　昭.50.2