II-291　浮遊砂を含む流れの統計的特性

広島大学工学部（正）余越 正一郎

1. 乱流中に最大乱子より大きな粒子が浮遊している状態を考える。このとき，水と粒子の間のマサツは渦動粘性を通じておこなわれると仮定する。

簡単のために，粒子の運動は Langevin 方程式で表現できるとする．

$$u_t = -\gamma u + \alpha(t) \quad , \quad \gamma = (9/2)(\rho/\rho_p)\nu_T/a^2$$

u, a, ρ_p はそれぞれ粒子の速度，半径，密度．ρ は水の密度，ν_T は渦動粘性，$\alpha(t)$ は揺動力。
上式を寿命周波数 ω の世界で考える。粒子速度の Lagrange スペクトル密度を $E_u(\omega)$，揺動力のそれを $E_\alpha(\omega)$ とすると直ちに，

$$E_u(\omega) = E_\alpha(\omega)/(\omega^2+\gamma^2)$$

揺動力のスペクトル E_α は，水流の Lagrange 速度スペクトル密度を $E(\omega)$ とすれば，$E_\alpha = \omega^2 E$.

2. 流体の Lagrange スペクトル密度としては，次を採用する。

$$E(\omega) = \frac{A\langle\varepsilon\rangle}{\omega_0^2}\frac{\exp[-c^2(\omega/\omega_\varphi)^2]}{1+(\omega/\omega_0)^2}$$

ω_0, ω_φ はそれぞれ最大乱子と最小乱子の寿命周波数，$\langle\varepsilon\rangle$ はエネルギー散逸密度，$c \approx 4A$，$A \approx 1$.
この式は Lagrange 構造函数が，中間乱子領域では寿命時間の1乗に，最小乱子域では2乗に比例するようにしたさいのスペクトルの漸近形である。Lagrange 表現の中に Euler 量であるエネルギー散逸度が入っているのが気になるところではあるが。

3. Stokes粒子を考える際にはマサツは分子粘性を介しておこなわれる。最小乱子よりも大きい粒子の場合には渦動粘性によると考える。粒径 d の粒子に相当する乱子の寿命周波数を ω_d とすると，ω_d より高周波の部分が渦動粘性 ν_T として粒子に作用するものと仮定する。さらに，ν_T は $E(\omega)$ と ω のみによると仮定すると，

$$\nu_T = \int_{\omega_d}^{\infty}\frac{E(\omega)}{\omega}d\omega \approx \frac{A\langle\varepsilon\rangle}{2\omega_d^2}$$

となり，大きな粒子ほど大きな渦動粘性をうけることになる。

4. 最小乱子より大きな粒子に対する揺動力のスペクトルは相当白いものであることがわかる。これより，

$$E_u(\omega) \approx \frac{A\langle\varepsilon\rangle}{\omega^2+\gamma^2}, \qquad \langle u^2\rangle \approx \frac{\pi A\langle\varepsilon\rangle}{\gamma} .$$

粒子の運動は乱流と力学的平衡にあり，乱流温度 T の水流中で定常過程としての運動をしていることがわかる。

$$\frac{kT}{m} = \frac{\pi A\langle\varepsilon\rangle}{\gamma}$$

mは粒子の質量，kは Boltzmann定数である。