

京都大学工学部 正員 辻本 哲郎
京都大学工学部 正員 中川 博次

河床波 (dunes または ripples) の形成された河床での砂粒運動は複雑で、その厳密な解析は難しいが Hubbell ら¹⁾ による提案された *rest period*, *step length* の定義 (図 1) を用い、Einstein によって始められた流砂の *stochastic model* での記述が可能である。dune 等が形成された場合は平坦河床の場合と異なり G. E. M.²⁾ *step length* に *gamma* 分布, *rest period* に指数分布を適用したモデルが推奨されているが、本報では *dune bed* の *profile data* をもとに河床波が形成された場合の砂粒運動の統計的性質を考察し、*dune bed* を対象とした *stochastic model* の一般化を示しこれらを検討した。

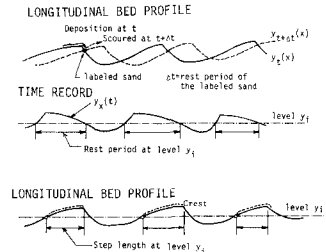


図1 *rest period*, *step length* の定義

Generalized stochastic model dunes が形成された場合や、平坦河床でも比較的細砂の場合には *rest period*, *step length* は必ずしも指数分布に従わず、³⁾ そのためいわゆる複合 Poisson 過程にもとづいて取り扱わなくてはならず、特別の場合 (G. E. M.) を除いて砂の分散性状を予測するのは困難である。そこで著者は *generalized model* を提案し必要な諸量の予測を可能にした。³⁾ 砂の分散性状を端的に示すのは着目砂粒群の時間 t 後の移動距離 $\{x(t)\}$ ($\{ \}$ 内の量は確率変数の確率密度 $f_x(x)$, あるいは距離 x に達するに要する時間 $\{t(x)\}$ の確率密度 $f_t(t)$ であり、実用上これらのモーメントが知られれば充分である。一般に $\{x(t)\}$, $\{t(x)\}$ の k 次モーメントは次のように導かれた。

$$E[\{x(t)\}^k] = \sum_{n=1}^{\infty} \{E[Y_n^k] \cdot P_n(t)\}, \quad E[\{t(x)\}^k] = \sum_{n=0}^{\infty} \{E[S_n^k] \cdot P_n(x)\} \quad \text{----- (*)}$$

$Y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$, $P_n(t) = \text{prob}[N(t)=n]$, $P_n(x) = \text{prob}[N(x)=n]$; ここで $\{x\}$, $\{T\}$ は *step length*, *rest period* であり, $\{N(t)\}$, $\{N(x)\}$ はそれぞれ距離 x , 時間 t までの間の *step* 数を表す。また *step length*, *rest period* が互いに独立ならば $\{Y_n\}$, $\{S_n\}$ のモーメントは $\{x\}$, $\{T\}$ のモーメントと容易に結びつけられ、これより式は次のように書き換えられる ($k=1, 2$ の場合)。

$$E[\{x(t)\}] = E[X] \cdot E[N(t)], \quad E[\{t(x)\}] = E[N(x)+1] \cdot E[T] \\ E[\{x(t)\}^2] = \text{Var}[X] \cdot E[N(t)] + \{E[X]\}^2 \cdot E[N(t)]^2, \quad E[\{t(x)\}^2] = \text{Var}[T] \cdot \{E[N(x)+1]\} + \{E[T]\}^2 \cdot \{E[N(x)]^2\} + 2E[N(x)+1]$$

このように $\{x(t)\}$ ($\{t(x)\}$) の k 次モーメントは $\{N(t)\}$ ($\{N(x)\}$) および $\{x\}$ ($\{T\}$) の k 次以下のモーメント $T=1$ で表わされる。ここで $\{N(t)\}$ ($\{N(x)\}$) のモーメントの計算は一般に難点となるがこれは積分変換によつて克服された。³⁾

ところで、河床波の平衡状態における流砂量や平均的分散性状を問題とする場合は必ずしも右の小さい時は必要でなく $t \rightarrow \infty$ の漸近挙動を知れば良い。中心極限定理を用いると $E[N(t)] + t/E[T]$, $\text{Var}[N(t)] + \alpha_T^2 t/E[T]$ (これは変動係数を表す) となり、結局次式が得られる (一例)。

$$\text{Var}[x(t)] = \{E[X]\}^2 \cdot \{\text{Var}[N(t)] + \alpha_X^2 E[N(t)]\} + \{E[X]\}^2 / E[T] \cdot (\alpha_T^2 + \alpha_X^2) \cdot t \\ \text{Var}[t(x)] = \{E[T]\}^2 / E[X] \cdot (\alpha_T^2 + \alpha_X^2) x + \text{Var}[T] \quad \text{----- (*)}$$

図-2 は先に行なつた *rest period* が指数分布より大きくした著者のトレーサー実験 (平坦路床) の結果³⁾ と上式と比較したもので、*step length*, *rest period* が指数分布のりなりずれでも分散性状を予測できる。

Dune bed での砂粒運動の統計的性質 *dune bed* での *rest period*, *step length* などのような分布性状がある場合の分散特性に影響を与えることから、図-1 の定義による河床の *profile data*⁴⁾ をもとにこれらを検討した。

rest period: *rest period* には着目砂粒が河床のどの高さに存在するか強く影響するので、まず高さ方向の位置 (y) での条件付分布を検討した。砂粒が y の位置に存在する確率は河床高分布を置き換えられると考

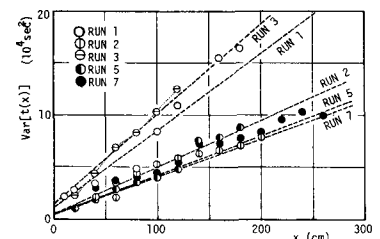


図2 トレーサー実験による検証

えられこれを正規分布(零平均, 標準偏差 σ_y)とすると *rest period* の条件付平均 $\langle T(y_*) \rangle$ ($y_* = y/\sigma_y$) は次式のよう
 うに求められ $-2 < y_* < 2$ 程度で実験結果によって検証された。 $\langle T(y_*) \rangle / \langle T_0 \rangle = \sqrt{2\pi} \exp(y_*^2/2) \cdot \int_0^\infty n^2 \exp(-n^2/2) dn$
 ここで $\langle T_0 \rangle$ は $y = 0$ での条件付平均 *rest period* でありその値は平均 *rest period* $\bar{T}$ とほぼ一致している(著者の
 実験および Grigg⁵⁾ のトレーサテストの結果で検証)。したがって近似的には著者らによって示した実験式
 $\langle T(y_*) \rangle / \bar{T} = \exp(-0.9y_*)$ が認められ標準偏差についても条件付の値の y 方向の変化 $\sigma_y / \sigma_{y0} = \exp(-0.9y_*)$ が得られ
 る。これらから $\sigma_y / \langle T \rangle = \sigma_{y0} / \langle T_0 \rangle$ とし条件付 *rest period* の変動係数は y にか
 わらず一定値となり、その値はほぼ1よりそれより若干小さい。一方条件を解放した
rest period の変動係数は1よりも大きく Grigg⁵⁾ の実験結果と併せて検討すると
 約1.2程度である。これは条件付分布の条件を解放(積分)するときに変動係数が大
 きくなる²⁾ことに起因しており、*dune bed* の場合の *rest period* は図-4に示すように
shape parameter がほぼ0.7の *gamma* 分布により良く適合するが、条件付分布
 はむしろ指数分布に近い(図-5参照)。

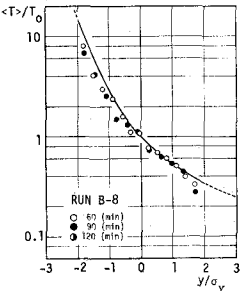


図-3 条件付平均 *rest period*

step length: *rest period* の場合、着目砂粒が河床内に埋没し、
 存在高さのばらつきが大きくなり、そのため変動係数が大きいのに対し、*step length* は
 つねに河床面上を運動し
 ている砂粒について測られ
 ており、しかもそれが河床
 形状に強く規制されて
 いること、河床は不規則と
 いえども比較的規則性
 があること(たとえば河床波長の変動係数 α_L は0.3~0.5程度⁴⁾)により、その
 変動係数は1よりも小さくなる。実際、*step length* の定義(図-1)より、その
 分布は零平均化した河床高系列 $y(x)$ の零交叉間隔分布と同様であろうと
 類推され、これを認めれば *step length* の平均値 L 、分散 σ_x^2 は河床波長
 のそれぞれ L 、 σ_L^2 のそれぞれ2となる。よって $L = L/2$ 、 $\alpha_x = \sqrt{2} \alpha_L \approx 0.7$
 が得られ、これらは実験結果^{4), 5)}で検証された。この結果より、*step length*
 の分布は *shape parameter* $r = 1/\alpha_x^2 \approx 2$ の *gamma* 分布で表示し得ることになる。図-6は平均値
 で規格化した *step length* ($\zeta = x/L$) の累積確率と *gamma* 分布($r = 2$)の分布関数(図中実線)とを
 比較したもので良い合致が見られる。

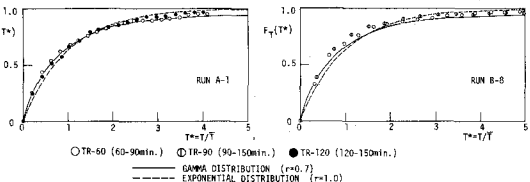


図-4 *rest period* の分布例

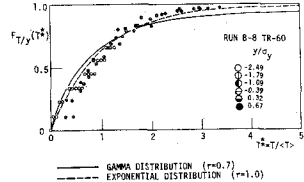


図-5 条件付 *rest period* の分布例

以上の考察から、*dune bed* では *step length*, *rest period* の変動係数はそれ
 ぞれ約0.7および1.2程度となり(図-7)、その
 ため着目砂粒群の分散性状と2次式
 が得られる。

$$E[x(t)] = (A/N)t, \text{Var}[x(t)] = (A^2/N)t$$

 図-8には、Yang のデータ²⁾が以上のモデルで良く説明し得ることを示した。
 本報に示した *stochastic model* の検討によりその適用性は増したものの、
 河床形状のスペクトル特性との関連ならびに水理条件との関係についてさらに
 検討すべき問題が残されていると考える。—参考文献—
 1) Hubbell & Sayre (1965) Proc. ASCE, HY, 2) Yang & Sayre (1971) Proc.
 ASCE, HY, 3) 中川 正太郎(1978)関西支部講演4) 中川 正太郎(1976)京大防研年報 5) Grigg (1970) Proc. ASCE, HY.

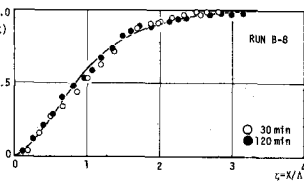


図-6 *step length* の分布例

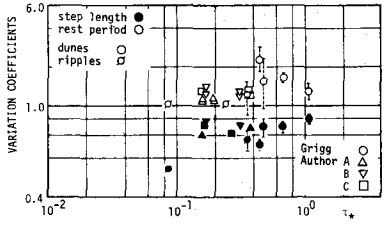


図-7 *step length*, *rest period* の変動係数

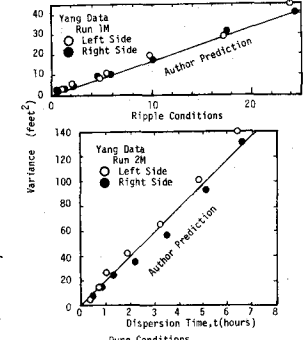


図-8 トレーサ粒子群の分散性状