II-252 3次元移流拡散方程式の離散近似について

中央大理工・土木 (正) 中澤昌平 (正) 川原睦人 (学) °前川静男

1. 緒言 海洋の汚濁拡散の問題などに関連して、2次元の領域で移流拡散方程式を組み立て、これを有限要素法や差分法を用いて離散化して取り扱うことはよく行なわれている。鉛直方向への現象の分布が問題になる系では、解析領域をいくつかの層に分けて考え、各層の内部では、適当に仮定された分布関数を積分して2次的に評価する、多層モデルと呼ばれる近似が取り込まれる場合もしばしばある。しかるに、この方法では、3次元的に広がりを持つ現象を、いくつかの拘束条件を用いて2次元モデルを結合して評価するのであるなら、時として数理モデルが現象を評価するとき、単純化し過ぎる傾向がある。また、拘束条件の評価は困難である、などの難点が存することが知られている。ここでは、鉛直方向に対しても、適当な補間関数を用いる有限要素法により、3次元の移流拡散方程式の数値的な取り扱いについて検討し、変数分離型の有限要素法を提案する。

2. 3次元移流拡散方程式 水平2次元にx, y座標を定め、鉛直上方にz軸を定める。各軸方向の流速をそれぞれu, v, w、また各軸方向への拡散係数をkx, ky, kzなどとおけば、考慮の対象としている物質の濃度Cは

(1) $$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + w\frac{\partial C}{\partial z} = k_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + k_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

で与えられる。重み関数をC*とおけば、移流項及び拡散項を部分積分した方程式は

(2) $$\left(C^*, \frac{\partial C}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial C^*}{\partial x}, uC\right) - \left(\frac{\partial C^*}{\partial y}, vC\right) - \left(\frac{\partial C^*}{\partial z}, wC\right)$$

$$+ k_x\left(\frac{\partial C^*}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial x}\right) + k_y\left(\frac{\partial C^*}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial y}\right) + k_z\left(\frac{\partial C^*}{\partial z}\frac{\partial C}{\partial z}\right) = 0$$

ここで、自然境界条件としては、次の境界積分による、移流、及び拡散によって系の外部との物質収支を生じないという意味で、完全な反射の条件が想定される。すなわち、

(3) $$\int_S C^* \left\{ \left(uC - k_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)n_x + \left(vC - k_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)n_y + \left(wC - k_z\frac{\partial C}{\partial z}\right)n_z \right\} dS$$

3. 有限要素法による空間変数の離散化 変分方程式(2)より時間微分の項を除いた系を有限要素法によって離散化する。空間を適当な多面体の小領域の集合で表わし、各々の小領域の頂点などで濃度Cを与える補間多項式を(4)式の形で与えるものとしよう。また、流速u, v, wなどに対しても同じ形状関数を用いるならば

(4) $C = \Phi_\alpha C_\alpha$ (5) $u = \Phi_\alpha \hat{u}_\alpha$ $v = \Phi_\alpha \hat{v}_\alpha$ $w = \Phi_\alpha \hat{w}_\alpha$

ここで、同一項に同じ添字が表われる場合にはその総和を取るものとする。また、上付きの^は既知量であることを示す。次に、形状関数Φ_αの取り方について検討する。

3.1 8節点アイソパラメトリック要素 形状関数に対する制約は、要素内でたかだか1回微分可能であれば有限要素法が成立することより、最も簡単な四面体1次要素の使用が考えられる。しかるに、要素を定義する幾何学的なデータの準備が困難である、また同じ理由で数値解の評価が困難であることなら、標準的なモデルとしては六面体の8頂点に節点を設けたアイソパラメトリック要素が用いられた。この要素は、特に浅水域の3次解析などに於て、偏平な形状が与えられた場合に、近似が不安定となり易いという欠点を有することが明らかとなった。これらの問題に対しては、特に鉛直方向と水平次元では、流速や拡散係数などのパラメータの値も著し

く異なる場合も多く，やや実用的とは評価し難い点がある。

3.2 変数分離型3角柱要素　前述の難点を考慮し，特に浅水域の3次元移流拡散問題を取り扱う目的で形状関数 $\varphi(x,y,z)$ を，水平方向を補間する関数 $\Phi(x,y)$ 及び鉛直方向を補間する関数 $\Theta(z)$ の積の形に変数分離して表現する。このとき，問題の性質を考慮すれば，要素形状に近似を持ち込み，極めて簡単化できる。すなわち；(i)座標系に対する制約として，三角柱の上面，及び底面は x-y 平面に平行にとる。(ii)形状に対する制約として，上下面の三角形は合同であって，全体座標系の中で同じ x-y 座標を取るものとしておく。第1図に，このようにして定めた要素の形状を，8節点アイソパラメトリック要素とともに示す。水深の変化する領域に対する離散モデルを設定する場合には，要素の水深を3頂点での平均水深で代表させることにする。以上の近似のもとで，水平方向には

(6)　$\Phi(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$

また，鉛直軸に沿って

(7)　$\Theta(z) = b_0 + b_1 z$

などと置く。

4. 数値解析例　3.1節及び3.2節に示した要素を用いて得た数値解の例を第2図～第4図に示す。第2図には，最も基本的な例として立方体の1頂点に濃度を与えた場合に対する結果である。同一条件では何れのモデルでもほぼ同じ精度の解が求められる。第3図，第4図には，水深の異なる領域に対する簡単な例題に対して変数分離型の要素を用いて得た数値解を示す。第4図中，黒丸は $\vec{v} = v = 0.1$，$k_x = k_y = 1.0$，$k_z = 0.1$ の場合における表面の濃度，白丸は $\vec{v} = 0$ の場合の結果を示す。

5 結言　3次元移流拡散方程式に着目して，有限要素法を用いた数値的な取扱いを試みた結果，特に浅水域に関する問題の3次元解析のために有効な，変数分離型の要素が導かれた。これらの要素は，各係数行列の積分が容易であるなどの利点を有し，実海域を対象とした土砂の移動の問題に適用され，よい結果が求められている。

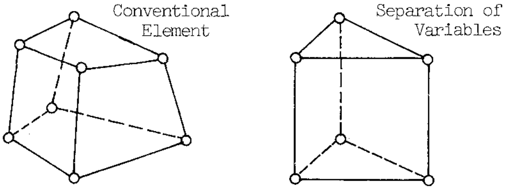
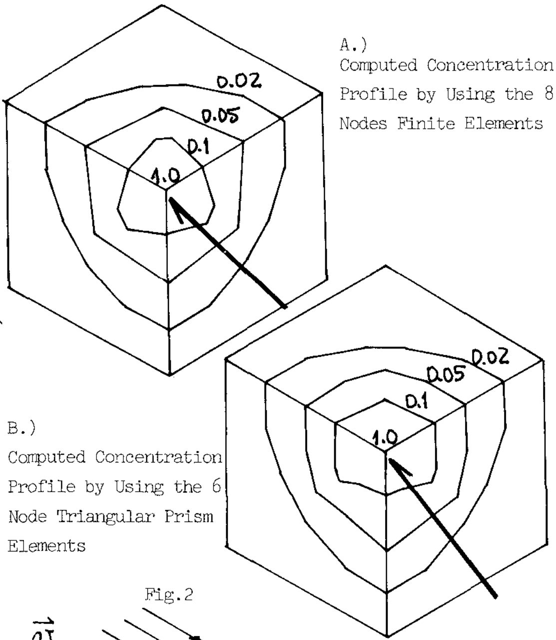


Fig.1　Method of Interpolation



A.) Computed Concentration Profile by Using the 8 Nodes Finite Elements

B.) Computed Concentration Profile by Using the 6 Node Triangular Prism Elements

Fig.2

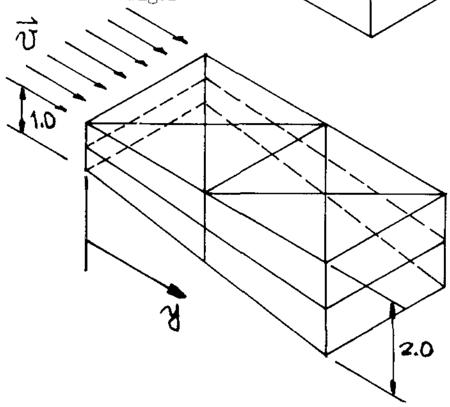


Fig.3　An Example of Shallow Channel with Variable Depth

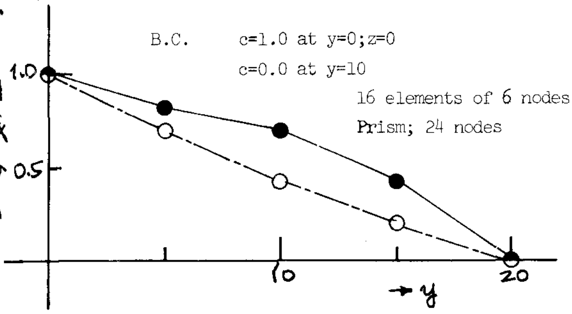


Fig.4　Computed Concentration Profile