

京都大学工学部 正 員 〇 綾 史郎
京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
京都大学大学院 学生員 小門 武

1.はじめに 開水路流れにおける保存物質の挙動は、乱流拡散方程式に、一次元解析法と適用して得られる移流分散方程式によって、記述される。流れが等流の場合、移流分散係数も理論的に求まり、解析解も求まることが多いが、我々が主として対象とする河川では、流れは不等流、不定流であつて、このような場合、解析的に解を求めることは困難であり、数値的に求めねばならない。移流分散係数についても、流れが複雑となるため、正確に把握されず、等流状態の値を参考にして解析されているのが現状である。その詳細は、実際河川での観測資料の収集が重要な基本となることは言うまでもないが、本論文では、室内の実験水路において不等流状態の流れをつくり、移流分散実験を行ない、数値計算結果と比較して、数値計算による現象シミュレーションの精度について検討した。

2. 水理実験の概要 移流分散実験は、全長10m、幅10cm、勾配1/500の水路で行なわれた(図-1)。実験は、流量をかえた2ケースであり、それぞれの流量に対して、等流状態のもと、下流端において1cm堰あげて不等流としたときの双方について、水路の上流より、トレーサー(アルコールで比重調整した6%食塩水)を樋によって瞬間面源として投入することにより行なった。濃度の測定は水路中央、水深の1/2の点で、一断面一点とし、流れ方向に同時多点測定(M.P.0~4)を行なつて、濃度~時間曲線を測定した。実験の際の主要な水理量を表-1に示している。

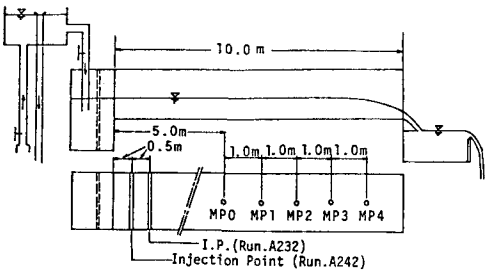


図-1 実験水路

表-1 水理量

	A232	A232	A241	A242
流量 (cm ³ /s)	411	411	190	193
水深 (cm)	1.62	3.06-3.59	1.09	2.54-3.12
流速 (cm/s)	25.3	11.5-13.3	17.4	6.09-7.48
Fr.No.	0.63	0.22	0.53	0.13
Re.No.	3370	3200	1620	1640
摩擦速度 (cm/s)	1.55	—	1.36	—
分散係数 (cm ² /s)	40.5	—	25.0	—

3. 数値解析法 保存性物質について移流分散方程式は、

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (DA \frac{\partial C}{\partial x}) \tag{1}$$

ここに、C;濃度、u;断面平均流速、A;流積、D;移流分散係数、t;時間、x;距離である。

移流分散方程式(あるいは、移流拡散方程式)の数値解析法については、既に多くの研究がなされており、その差分法も数多く提案されているが、本研究では、移流項に implicitな後退差分法を、また分散項については、explicitな差分を用いて、つぎのように差分化した(図-2)。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} + \theta u_j \frac{1}{\Delta x_{j-1}} (C_j^{n+1} - C_{j-1}^{n+1}) + (1-\theta) u_j \frac{1}{\Delta x_{j-1}} (C_j^n - C_{j-1}^n) \\ & = \frac{1}{A_j} \left\{ \frac{2}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} \left(\frac{D_{j+1} + D_j}{2} \frac{A_{j+1} + A_j}{2} \frac{C_{j+1}^n - C_j^n}{\Delta x_j} - \frac{D_j + D_{j+1}}{2} \frac{A_j + A_{j-1}}{2} \frac{C_j^n - C_{j-1}^n}{\Delta x_{j-1}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

水の流れを等流とし、分散係数も変化しないものとして、打ち切誤差による解析法を用いるものとする、(2)式の疑似微分方程式は、1次式となる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = \left\{ D + \frac{1}{2} u \Delta x - (1-2\theta) \Delta t u^2 \right\} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left\{ \frac{1}{6} (1-6\theta + 6\theta^2) u^3 \Delta t^2 - (1-3\theta) u D \Delta t - \frac{1}{6} u \Delta x^2 \right\} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} \tag{3}$$

右辺第2項中の $D_n = \frac{1}{2} u \Delta x - \frac{1}{2} (1 - 2\theta) u^2 \Delta t$ は、数値粘性係数であり、第4項は、数値分散項である。本計算では、数値粘性の影響を除くため、移流分散係数より数値粘性係数を引いたもの ($D_n = D - D_n$) を改めて移流分散係数としておき、数値計算を行なった。

このとき、線形安定性理論により、増幅因子を求めて、安定条件を与える。 $\theta = \frac{1}{2}$ のとき

$$D \leq \frac{1}{2} u \Delta x \quad \text{で} \quad \text{無条件安定}$$

$$D \geq \frac{1}{2} u \Delta x \quad \text{で} \quad D \leq \frac{1}{2} \frac{u^2 \Delta t}{\Delta x}$$

4. 結果と考察 水理実験によって得られた濃度～時間曲線と、数値実験によって得られた濃度～時間曲線を比較することにより、数値シミュレーションの精度を検討する。

水理実験によって得られた濃度～時間曲線は、数回トレーサ実験を繰り返して、現象の再現性を確認した。

また、濃度の断面代表性については、同一断面における同時多点測定より、中心測点におけるピーク濃度が若干高く、また時間的に少し先行することが確認されている。

数値シミュレーションでは、M.P.O.における濃度～時間曲線を上流端の境界条件とし、下流端境界条件としては、仮想的にM.P.4における流速と流積を有する水路が連続しているものとした。

差分間隔は、 $\Delta t = 0.755$ 6秒 (Run A242)、 0.3778 秒 (Run A232) で、 $\Delta x = 6.25$ cm とした。

図5は、Run A242において、 $\Delta x = 12.5$ cm とした時の結果と比較したものであるが、若干のピークの遅れと低下が認められ、これは、数値分散項の影響と考えられる。

流速としては、流量を流積で除した値 ($u = Q/A$) とこれを、1.125倍した値 ($u = 1.125 Q/A$) との双方を用いた。これは、 u を用いたとき、計算値が実測値に比較して、下流ほど遅れたためである。(図3～6では、すべて u を用いてある。)

分散係数としては、ピーク濃度が実験値と合うように試行錯誤的に求めた。図6にRun A242において、分散係数をかえた計算の一例を示す。

図3、4は、このようにして得られた数値解と実測値との比較を示すものであり、精度よくシミュレーションされているといつてよい。なお、表1からわかるように、流れの変化は、測定区間中でさほど激しくなく、近似的に一定と考えてRouting法によりRoutingした結果もこれらの図中(破線近似解)に示している。

本実験例では、流速の変化があまりなかったが、今後、流速変化の大きい例について検討したいと考えている。

最後に、実験ならびにデータ整理に協力された、京都大学院生藤田乾一、細田尚両君に謝意を表します。

参考文献：1) 矢嶋、野木；発展方程式の数値解析 岩波書店、1977

2) 土木学会編、土木工学における数値解析/流体力学編

サイエンス社 1974, pp.59～66

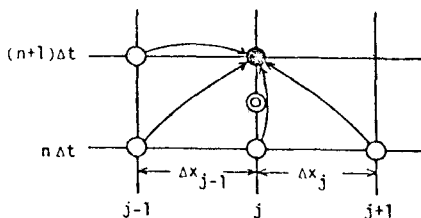


図-2 差分スキーム

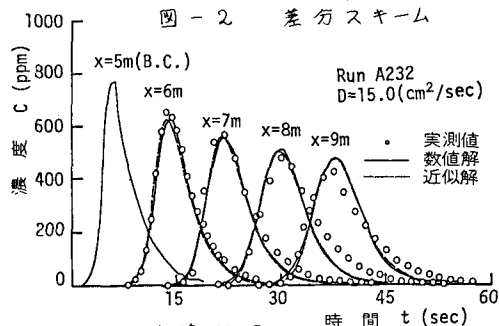


図-3 計算結果

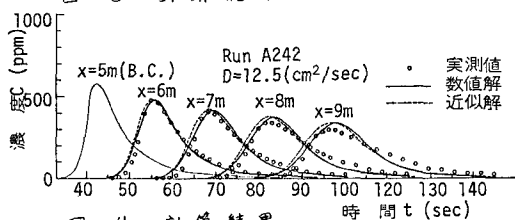


図-4 計算結果

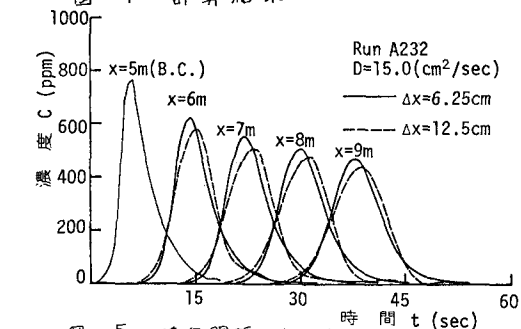


図-5 差分間隔による解の相違

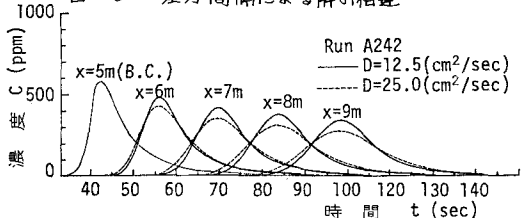


図-6 分散係数による解の相違