

信州大学工学部
信州大学工学部

正員
正員

富所 五郎
荒木 正夫

1 まえがき 風により湖氷が流動するとき、湖底近くの流れは水面と逆方向となることが多い。このような場合の数値解析モデルとしては、潮流解析だけでなく一般に行なわれているように鉛直方向に流速を一定とするのではなく、何らかの形で鉛直方向の流速分布を考慮するもの、つまり三次元モデルでなければならぬ。本研究はFEMにより湖による潮流の流動の三次元非定常解析を行なうものであるが、少ない未知量数で近似度をあげるために鉛直方向には節点の多い連続関数で、水平方向には従来のような多項式による試験関数を用いる。鉛直方向の連続関数としてここでは多項式と三角関数の二つを考え、既知湖を解析対象にしてこの二つの場合の解の近似度を検討するとともに実際に三次元非定常解析を行なう。

2 基礎式とその離散化 水深が浅く、流れの緩やかな湖の流動を支配する方程式は¹⁾ $\partial u / \partial t + f u = -1/\rho \cdot \partial p / \partial x + K \cdot \partial^2 u / \partial z^2 - U$, $\partial v / \partial t + f v = -1/\rho \cdot \partial p / \partial y + K \cdot \partial^2 v / \partial z^2 - V$, $0 = -1/\rho \cdot \partial p / \partial z - g - W$, $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0$ (4) で、境界条件は 水面 $z = \eta$ で $K \cdot \partial u / \partial z = \tau_x$, $K \cdot \partial v / \partial z = \tau_y$, 湖底 $z = -h$ で $u = v = w = 0.0$ である。ここに u, v, w は x, y, z 方向の流速で x, y は静水面内で東、北を正方向とし、 z は鉛直方向に静水面を $z = 0.0$ とし上を正方向とする。また p は圧力, ρ は水の密度, K は鉛直混合係数, g は重力の加速度, τ_x, τ_y は水面に作用する風による x, y 方向のせん断応力である。ここで密度を鉛直方向に一定、つまり流れを一層流と仮定し、さらに鉛直混合係数も鉛直方向に一定とする。④式を z 方向に積分し、大気圧 $p_a = 0.0$ とすると $p = \rho g \cdot (-z + \eta)$ となる。これを①, ②式に代入すると①, ②, ④式は u, v, η を未知量とする連立方程式となる。ここで流れを定常とすると式は z 方向に積分でき、得られた式は二次元モデルと同様に解くことができる。この半解析的方法(以下これによる解を半解析解という)について2は前にのべた。²⁾ しかし非定常項が入ると z 方向に積分できないため、ここではFEMにより直接三次元解析を行なう。連立方程式をまず空間方向に離散化するためにつぎのような試験関数を考える。 $u = (1 + z/h) \cdot N_i \cdot u_{in} + ((1 + z/h)^2) \cdot N_i \cdot u_{in} - (5)$, $v = (1 + z/h) \cdot N_i \cdot v_{in} + ((1 + z/h)^2) \cdot N_i \cdot v_{in} - (6)$, $\eta = N_i \cdot \eta_{in} - (7)$ 。ここに N_i は水平方向の形関数で、ここでは三節点三角形要素のものである。 z 方向の関数 $(1 + z/h)$, $((1 + z/h)^2)$ の項は流れを x, y の二次元とした時解析的に得られる関数形で、少ない項数で最もよく鉛直方向の流速分布を近似できるのではないかと考えこの関数形とした。さらに鉛直方向の位置の流速分布を近似できるものとして $u = (\cos \pi z / 2h) \cdot N_i \cdot u_{in} + (\cos 3\pi z / 2h) \cdot N_i \cdot u_{in} + \dots - (8)$, $v = (\cos \pi z / 2h) \cdot N_i \cdot v_{in} + (\cos 3\pi z / 2h) \cdot N_i \cdot v_{in} + \dots - (9)$, $\eta = N_i \cdot \eta_{in} - (10)$ を考えた。うしろの流速に対する試験関数は湖底での境界条件を自動的に満足している。ここで $((1 + z/h) N_i, ((1 + z/h)^2) N_i, N_i$ と $(\cos \pi z / 2h) N_i, (\cos 3\pi z / 2h) N_i, \dots, N_i$ を座標関数として連立方程式を離散化すると $\partial \cdot \partial u / \partial t + K \cdot \partial^2 u = F - (11)$ となる。ここに ∂ は $u_{in}, v_{in}, \eta_{in}$ を成分とする列マトリ

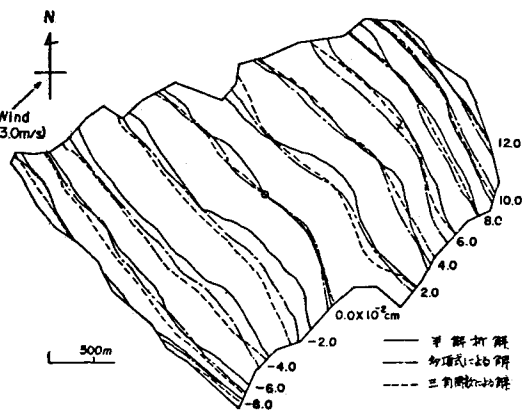


図-1 水面位 (0EP点 0.0cm)

ックス、 C 、 K 、 F は係数マトリックスである。つぎに時間方向の離散化を表として様々な近似法があるが、ここは一次の時間形状関数を用いるFEMによった。この時(11)式は $(C/\Delta t + 2/3 \cdot K) \cdot \Phi_{k+1} + (-C/\Delta t + 1/3 \cdot K) \cdot \Phi_k = 2/(\Delta t)^2 \int_t^{t+\Delta t} t \cdot F \cdot dt$ (12)となる。この式は差分法を用いて離散化した時のCrank-Nicolson型のスキーム $(C/\Delta t + \theta \cdot K) \cdot \Phi_{k+1} + \{-C/\Delta t + (1-\theta) \cdot K\} \cdot \Phi_k = \theta F_{k+1} + (1-\theta) F_k$ 、 $0 \leq \theta \leq 1$ (13)において $\theta = 2/3$ としたものと右辺を除くことで一致する。(13)式は $1/2 \leq \theta \leq 1$ の時間条件安定であるので(12)式も無条件安定である。(12)式を用い、ある初期状態より Δt ステップごとに全ての時刻における解を求めることができる。

3 半解析解との比較 試験関数として(5)、(6)、(7)式を用いる方法(以下この方法による解を多項式による解という)と(8)、(9)、(10)式を用いる方法(以下この方法による解を三角関数による解という)による解の近似度を検討するため諏訪湖を対象にして半解析解との比較を行なう。ただし(8)、(9)式は二項までとした。解析条件は流れを定常とし、風速3m/secのS面の風が湖湖全体に一樣に連続して吹くとし、湖への流入を全て無視、つまり湖岸での流速を全て0.0とした。また $K = 2.3 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、 $\tau_a = \tau_f = 0.092 \text{ g/cm} \cdot \text{sec}$ の値を用いた。

以上による結果として図-1に水面位、図-2に図-1のO×印点の鉛直方向の流速分布を示す。これによると多項式による解の方が半解析解に近く、近似度が高いと言える。部分的にはかなりの誤差があるが、これらの方法による未知量は三次式的にメッシュを組む場合に鉛直方向に二つの点を取るのと同じで、これを考えるとこの程度の誤差は妥当なものと思える。また近似度を上げるためには試験関数にもっと多くの項を入れればよいのであるが、これは今後検討中である。

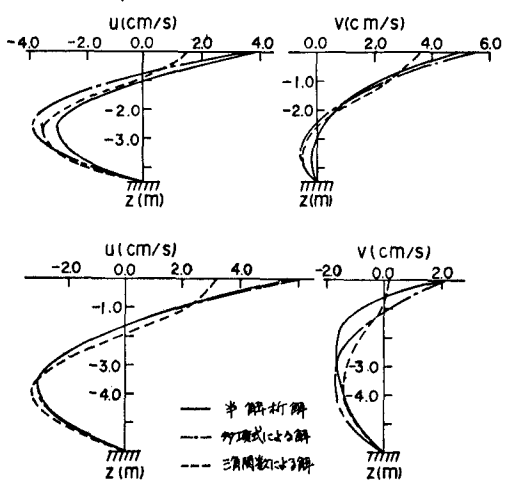


図-2 流速分布(上図、図-1のO×印点、下図、O●印点)

4 非定常解析 解析条件は風がない状態に急に風速3m/secのS面の風が湖湖全体に一樣に連続して吹く場合で、他の条件は同じと同等である。時間さざみ幅 Δt は初めの5ステップを100secとし、その後は200sec、400secと段階的に増加させた。図-3に風が吹き始めから各時間経過における図-1のO×印点の鉛直方向の流速分布を示す。これは多項式による解で、三角関数による解でも同じような結果が得られている。図より風の吹き始めは水面付近が風下側に流れ、これがしだいに発達し、その後風下側の水面上昇によると思われる湖底付近の風向と逆方向の流れがしだいに発達し、定常流れに近づくことがわかる。また諏訪湖は風が吹き始めから5~6時間ぐらいは定常状態になると思われる。他の詳しいことは講演時に発表する。

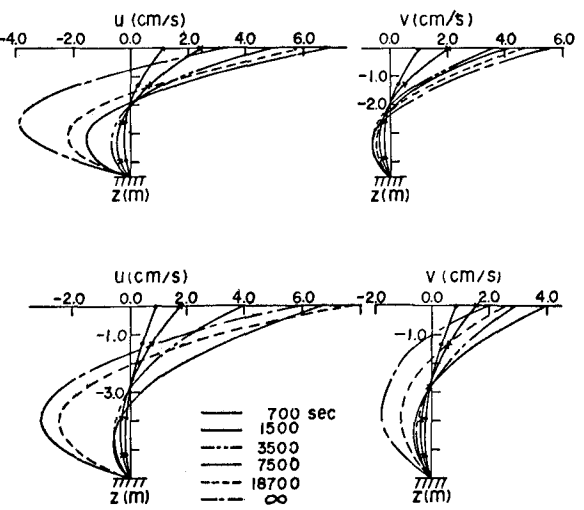


図-3 流速分布の変化(上図、図-1のO×印点、下図、O●印点)

1) J.A.Liggett. et al : Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, ASCE, HY2. (1969)
 2) 余越 富村 : 諏訪湖の湖流に関する研究, 31周年誌(1976)