II-246　　処理関数法による粘性流れの解析

(株) ユニック　　　　正　○西田寿夫　　正　長谷川賢一
中央大学理工学部土木学科　　正　中澤晶平

はじめに

近年、定常、非圧縮流に対する二次元NAVIER－STOKESの数値解析は、有限要素法を用いて多くの手法が開発されてきた。初期は流れ関数－渦度を用いた方法が採用された。[1] この方法は非圧縮性の条件を満足するが、境界条件の処理がむずかしくなる。これらを理由として、その後、流速－圧力を未知数とする方法、流れ関数のみを未知数とする方法が提案された。

著者らは、Heinrichらが導入した処罰関数を用いる有限要素法をストークス流れについて示す。[2]

本方法は、連続の条件を若干ゆるめることにより、圧力項が消去され、自由度が減る利点がある。

基礎方程式

ストークス流れの連続の式，運動の式は総和規約を用いて以下のように示せる。

$$u_{i,i} = 0 \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \left\{ -P\delta_{ij} + \mu \left(u_{i,j} \quad u_{j,i} \right)_{,j} \right\} = 0 \qquad (2)$$

ここで　σ_{ij}：応力テンソル　　P：圧力　　δ_{ij}：クロネッカーデルタ

　　　　μ：粘性係数　　u_i：i方向流速

また、$(\ )_{,j}$ は j 方向偏微分を示す。

処罰関数の導入

処罰関数を定義することにより、圧力は以下のように求められる。

$$P = -\lambda u_{i,i} \qquad (3)$$

即ち、連続の条件をややゆるめることにより数値計算を行なうことになる。すると(2)式は、以下のように書き表わせる。

$$\sigma_{ij} = \left\{ \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)_{,j} \right\} = 0 \qquad (4)$$

変分定式化及び離散化

(4)式の変分形式は，重み関数 u_i^* を用い若干の修正を施すと以下のようになる。

$$\lambda \int_V u_{i,i}^* u_{j,j} \, dV + \mu \int_V u_{i,j}^* \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) dV = 0 \qquad (5)$$

(5)式に，$u_j = \Phi_\alpha u_{\alpha j}$ なる内挿関数を導入し、離散化すると以下のようになる。

$$\left[\lambda \int \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j} \, dV + \mu \int_V \left(\Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,i} + \Phi_{\alpha,k} \Phi_{\beta,k} \delta_{ij} \right) dV \right] u_{\beta j} = 0 \qquad (6)$$

数値計算例

数値計算例として山田らが行なった数値計算例と比較する。[3] 図1に要素分割図，図2に処罰関数値及び使用要素をかえた時の各断面の流速分布図を示す。図3にはそれより求めた圧力分布を処罰関数$=10^4$ 及び使用要素は8節点アイソパラメトリック要素の場合について示す。この結果を山田らの結果と比較すると，圧力，流れの育成状態はほぼ一致している。しかし、出口付近での流速が，理論値，山田らの結果よりやや遅くなっている。これは、若干の圧縮性が導入されていることによるものと思われる。

謝辞

本論文を作成するにあたり，指導していただいた中央大学川原睦人博士，また、数値計算例を作成するにあたり多大の努力をしていただいた中央大学学生坪田幸司，平野慶和君に深甚の謝意を表します。

参考文献

1) Atkinson, B., Cord, C.C. & Irons, B., "Application of the finite element method to creeping flow problems" Trans. Inst. Chem. Eng Vol 48 (1970)

2) J. C. Heinrich et all. "Solution of navier-stokes equations by a penalty function finite element method" to appear

3) Y. Yamada "Finite element analysis of steady fluid and metal flow" Finite Elements in Fluids Vol 1

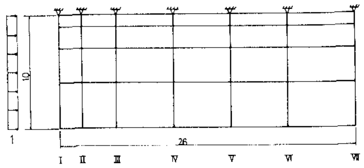

図 1

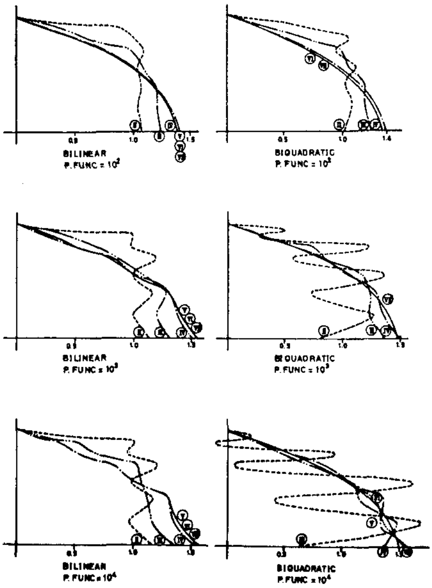

図 2

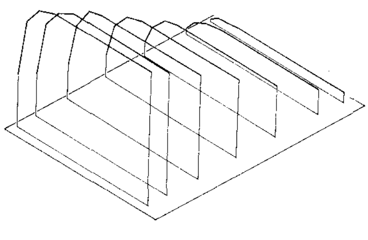

図 3