II-245　解析力学の流体力学への応用

日本大学工学部　正員　安田禎輔

まえがき　筆者は先に[1]流体の運動の表現において，従来よりの方法，すなわち，Euler及びLagrange的表現に対し，第三の運動の表現方法を提案した。

この表現方法を採用することにより，従来主として質点または質点系の力学にしか応用できなかった解析力学を，流体力学へ応用できることを示す。今回は解析力学におけるLagrangeの運動方程式を流体力学に応用しやすい形に表現し，その応用例を示す。

1　解析力学におけるLagrangeの運動方程式

ポテンシャルエネルギーUを持つ質点に対するニュートンの運動方程式を，次の一般化座標，すなわち

$q_1 = q_1(x, y, z)$

$q_2 = q_2(x, y, z)$

$q_3 = q_3(x, y, z)$，------

を用いて表現すると次式になる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{-------}\ (1)$$

$(i = 1, 2, 3 \text{ -----} f \leqq 3n)$

ここで

L；Lagrange関数，$L = K - U$

K；運動エネルギー

U；ポテンシャルエネルギー

n；質点の個数

式(1)を解析力学におけるLagrangeの運動方程式という。

2　Lagrange関数の表現について

ここでは，Lagrange関数Lを流体力学へ適用しやすい形に表現する。

流動する流体のエネルギーには，運動エネルギーK，位置エネルギーU_Eの他に，圧力による圧力エネルギーU_Pがある。

Ωを一般化座標q_iで表わされる質量力のポテンシャル，すなわち質量力ポテンシャルとすれば，質量mを持つ流体塊の各エネルギーは次式となる。

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\quad U_E = m\Omega,\quad U_P = \frac{m}{\rho}p$$

ここで，Lagrange関数$L = K - L$を

$$L = K - (U_E + U_P) \qquad \text{--------}\ (2)$$

と置いても(1)式は成立するので，流体力学においては(2)式で表現すれば都合がよい。したがってLは次式となる。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - m\left(\Omega + \frac{1}{\rho}p\right) \qquad \text{-----}\ (3)$$

粘性流体については，(1)式に粘性項を加味することにより取扱うことができるが，機会があれば論述したい。

3　運動の第三の表現[1]

まず一例としてCartesian座標系における例をあげる。

流塊の任意の物理量を$F = F(x, y, z, t)$とすれば

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}$$

となる。したがって，微分演算子d/dtは，Cartesian座標系において，第三の表現法を用いれば，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{-------}\ (4)$$

となる。(4)式の右辺は型式的にはEuler微分演算子，D/Dtと全く同形であるが，D/Dtよりも広義の意味がある。

さらに，一般的に論ずれば，一般化座標系における第三の表現法による物理量

$$F = F(q_1, q_2, \cdots, q_n, t),\quad q_i = q_i(x, y, z) \cdots (5)$$

の時間的変化量は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{q}_1\frac{\partial F}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial F}{\partial q_2} + \text{----} + \dot{q}_n\frac{\partial F}{\partial q_n} \qquad \text{-----}(6)$$

となり，次の微分演算子を得る。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial}{\partial q_2} + \text{------} + \dot{q}_n\frac{\partial}{\partial q_n} \qquad \text{-----}(7)$$

円柱座標系(r, θ, z)における第三の表現法による時間的微分演算子，すなわち(7)式は

$$v_r = \dot{r},\quad v_\theta = r\dot{\theta},\quad v_z = \dot{z}$$

であるから次式となる。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{---------}\ (8)$$

また，極座標系(r, θ, φ)においては

$$v_r = \dot{r},\quad v_\theta = r\dot{\theta},\quad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}$$

であるから(7)式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r\frac{\partial}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta} + v_\varphi\frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi} \qquad \text{-----}\ (9)$$

4　一般化座標系における質量ポテンシャルの微分

Cartesian座標系においては，当然次式となる。

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-R \quad , \frac{\partial\Omega}{\partial y}=-Y \quad , \frac{\partial\Omega}{\partial z}=-Z \qquad \cdots\cdots(10)$$

円柱座標系においては，r,θ,z方向の質量力をR,Θ Zとすれば次式となる。

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r}=-R \quad , \frac{\partial\Omega}{\partial\theta}=-r\Theta \quad , \frac{\partial\Omega}{\partial z}=-Z \qquad \cdots\cdots(11)$$

極座標系においては，r,θ,φ方向の質量力をR,Θ,Φとすれば次式となる。

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r}=-R, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\theta}=-r\Theta \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\,\Phi \quad \cdots(12)$$

5　Cartesian座標系における応用例

一般化座標は，$q_1=x$，$q_2=y$，$q_3=z$となり，したがって，Lagrange関数(3)式より

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=mu \quad , \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=mv \quad , \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=mw$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=m\left(X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=m\left(Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=m\left(Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

を得る。これらを(1)式に代入して，つぎのLagrange的表現による運動方程式をうる。

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

これらの式に，Cartesian座標系における第三の物理量の表現法による時間的微分演算子(4)式を適用すれば次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

上式は，流体におけるEulerの運動方程式と全く同型であるが，Eulerの式より広義の意味を持ち，$t=t_0$と置いた特殊解な場合の式がEulerの式であり，これは(4)式の特殊解を求める場合の式にすぎないのである。

6　円柱座標系における応用例

質量mの流塊の運動エネルギーを円柱座標(r,θ,z)で表わせば，$K=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$

であるからLagrange関数は次式となる。

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

一般化座標は，$q_1=r$，$q_2=\theta$，$q_3=z$であるから，(11)式を考慮して，Lを微分すると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=mv_r \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mrv_\theta \quad , \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=mv_z$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=m\left\{\frac{v_\theta^2}{r}+\left(R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=m\left(r\Theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=m\left(Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

これらの式を(1)式に代入して次式を得る

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt}-\frac{v_\theta^2}{r}&=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\\ \frac{dv_\theta}{dt}+\frac{v_rv_\theta}{r}&=\Theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{r\partial\theta}\\ \frac{dv_z}{dt}&=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

ただし，演算子d/dtは(8)式により

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}-v_r\frac{\partial}{\partial r}-v_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}-v_z\frac{\partial}{\partial z}$$

となり，$t=t_0$の場合は円柱座標系におけるEulerの運動方程式となる。

7　極座標系における応用例

質量mの流塊の運動エネルギーを極座標(r,θ,φ)で表わせば，$K=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)$

となるから，Lagrange関数は次式となる。

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)-m\left(\Omega+\frac{1}{\rho}P\right)$$

この場合，一般化座標は，$q_1=r$，$q_2=\theta$，$q_3=\varphi$となるから，(12)式を考慮してLを微分すると次式となる。

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r} \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2+mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2-m\left(R+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=mr^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2-m\left(r\Theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=m\left(r\sin\theta\,\Phi+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)$$

これらの式を(1)式に代入して次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv_r}{dt}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}&=R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\\ \frac{dv_\theta}{dt}-\frac{v_\varphi^2}{r}\cot\theta+\frac{v_rv_\theta}{r}&=\Theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{r\partial\theta}\\ \frac{dv_\varphi}{dt}+\frac{v_rv_\varphi}{r}+\frac{v_\theta v_r}{r}\cot\theta&=\Phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

ただし，微分演算子d/dtは(9)式により

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v_r\frac{\partial}{\partial r}+v_\theta\frac{\partial}{r\partial\theta}+v_\varphi\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}$$

となり，$t=t_0$の場合は極座標系におけるEulerの運動方程式となる。

むすび　直交曲線座標系にも応用できるが論述を省略した。Hamilton力学をのぞけば，以上述べたことがらより，従来主として質点または質点系の力学にしか応用されていなかった解析力学を，運動の第三の表現法とLagrange関数を(2)または(3)式で表現することにより，流体力学にも応用できることを示した。

〈参考文献〉

1)　安田禎輔：流れの運動の表現について，土木学会第32回年講Ⅱ　昭和52年10月