

京都大学工学部 学生員 古市 徹
 同上 正員 平岡 正勝
 同上 学生員 田中 宏明

1. はじめに. 孤立大煙源から安定な大気中へ放流された, 運動量と浮力を同時にもつ Plume (すなわち, Forced Plume) の挙動を解析することを目的とする. 従来の有効煙突高さの考えは, Plume の上昇と拡散を別個に扱うものである. 本研究の基本的立場は, Plume の運動量・浮力による上昇過程および拡散過程を解析するに当って, 運動量・熱・物質の同時移動現象としてとらえ, それらを記述する偏微分方程式を直接シミュレーションすることにある. 手法としては, 煙源近傍等部分的にメッシュのサイズを細かくできる有限要素法(FEM)を用いた. また, FEMは排出源の運動量を考慮できる merit がある. 普通よく煙源のモデル化として δ -関数で表現される外力項の扱い方について, 従来の差分法と今回行ったFEMによる新しい方法とを統一的に議論し考察を行なったので報告する.

2. 数式モデル. 対象領域は水平方向(x軸) 300m 高さ方向(y軸) 300m の2次元で, 煙源位置は $x=y=100$ m と想定している. 基礎方程式は適当な無次元化を行なった式(1)~(4)の4式である.⁽²⁾ここに, ζ, ψ, θ, C^* はそれぞれ無次元化した渦度, 流れ関数, 温度, 濃度で, K_v : 渦動粘性係数, K_e : 渦動伝導係数, K_c : 渦動拡散係数, Γ : 断熱減率, Γ_d : 温度勾配, ρ_0 : 初期密度 (const.), C_p : 空気の定圧比熱, H : 対象の高さ, g : 重力の加速度, U^* : x方向の速度, V^* : y方向の速度である. 分布定数系では煙源は外力項で表現され, それは数学的には δ -関数でモデル化されることが多い. 今の場合, Q_v, Q_t, Q_c はそれぞれ煙源の運動量, 熱エネルギー, 汚染物量を表わしている.

ここで問題となるのは, これらの外力項をいかに空間的・時間的に離散化するかということであり, 式(2)では $\partial Q_v / \partial x$ という δ -関数の微分を含んでいるということである. 前者については, 差分法(FDM)では δ -関数を離散化するのは困難なので, 従来何らかの近似が行なわれてきた. 後者については, FDMではやはり不可能であり, それで境界条件, 初期条件で考慮してもやはり問題が残る. しかし, 本報告でのFEMによる方法だときれいに解決する. 前者については, Fig-1に1次元の場合についてFDMとの関係から統一的にモデル化している. 後者については, δ -関数の微分は超関数としての意味から, FEMでは積分として評価されるので自然な形で解析される.

$$(1) \nabla^2 \psi = -\zeta$$

$$(2) \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} + V^* \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nabla^2 \zeta + \frac{g H^3}{K_v (\theta_0 + \Gamma_d (\theta / \Delta T_R))} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{H^3}{\rho_0 K_v} \cdot \frac{\partial Q_v}{\partial x}$$

$$(3) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial \theta}{\partial x} + V^* \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{K_e}{K_v} \nabla^2 \theta - \frac{H}{\Delta T_R} V^* (\Gamma - \Gamma_d) + \frac{H^2}{K_v \Delta T_R} \cdot \frac{Q_t}{\rho_0 C_p}$$

$$(4) \frac{\partial C^*}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial C^*}{\partial x} + V^* \frac{\partial C^*}{\partial y} = \frac{K_c}{K_v} \nabla^2 C^* + \frac{H^2}{K_v \Delta C_R} Q_c$$

但し, $Q_v = M_v \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$, $M_v, M_t, M_c: \text{const.}$
 $Q_t = M_t \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$, $\delta: \delta\text{-関数}$
 $Q_c = M_c \delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$

$$\Delta T_R = \frac{M_t}{4\pi K_t \rho_0 C_p} \Big|_{t=\Delta t}, \quad \Delta C_R = \frac{M_c}{4\pi K_c \delta} \Big|_{t=\Delta t}$$

$$(5) \begin{cases} \zeta = \sum N_i(x, y) \hat{\zeta}_i, & \psi = \sum N_i(x, y) \hat{\psi}_i \\ \theta = \sum N_i(x, y) \hat{\theta}_i, & C^* = \sum N_i(x, y) \hat{C}_i^* \\ N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \end{cases}$$

$$(6) -C_E \hat{\psi} + P5 = 0$$

$$(7) A_E \cdot \partial \hat{\zeta} / \partial \tau + (B_E + C_E) \cdot \hat{\zeta} + P3 + P4 = 0$$

$$(8) A_E \cdot \partial \hat{\theta} / \partial \tau + (B_E + C_E) \cdot \hat{\theta} + P1 + P2 = 0$$

$$(9) A_E \cdot \partial \hat{C}^* / \partial \tau + (B_E + C_E) \cdot \hat{C}^* + P6 = 0$$

$$(10) A_E \cdot \partial x / \partial \tau + (B_E + C_E) \cdot x + P = 0$$

$$(11) x_\tau = x_{\tau-\Delta \tau} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{\tau=\Delta \tau} + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_c \right] \cdot \frac{\Delta \tau}{2}$$

$$(12) \left[(B+C) + \frac{2}{\Delta \tau} A \right] x_\tau = A \left[\frac{2}{\Delta \tau} x_{\tau-\Delta \tau} + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{\tau=\Delta \tau} \right] - P_{\tau-\Delta \tau}$$

3. FEMによる定式化. 式(1)~(4)を, (5)のように3角形要素の1次の形状関数を用いてGalerkin法で定式化すると, それぞれ要素ごとに式(6)~(9)のようになる。A_E, C_E, P₂, P₄, P₆はconstで, B_E, P₁, P₃, P₅は逐次計算される。式(7)~(9)は, 式(10)の形式で統一でき, これから全体マトリックスを作り, 式(11)のように時間について離散化すると式(12)のような代数方程式系になる。

4. シミュレーションと結果. 適当なI.C.とB.C.の下で, 濃度についてだけFig-2~9にContourを示している。M₀=10²とし, 乱流特性を考慮してK_t=K_c=10 K_v=50 (m²/sec)として計算した。u=4 m/sのと, 61 meのと (Fig-2, 3)は運動量による影響がそれ程顕著ではないが, 121 meのと (Fig-4, 5)には濃度分布に差が現われている。u=2 m/sのと (Fig-6, 7)には浮力の影響が見られ, 上下方向の拡散も大きくなっている。u=6 m/sのと (Fig-8, 9)には水平速度の卓越で, プリズムが横に流され上下方向の拡散が小さい。いずれにしても煙源の運動量の影響がシミュレーションでできていると考えられる。

Appendix Fig-1の⑧と⑨が同値であることの証明, 簡単のため1次元でB.C.を考えない。(同様に証明できる。)

$\frac{\partial C}{\partial t} = AC$ の基本解を $U(x, y)$ とする。但し, $A = \frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial}{\partial x})$ 。⑧の解は偏微分方程式の理論から, 次のように求められる。⁽¹⁾ 但し, $N\Delta t \leq t < (N+1)\Delta t$ 。

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} U(t-N\Delta t, x, y) \{C_0(y) + D(y, N\Delta t)\} dy \quad \text{--- ①}$$

これは次のように変形できる。

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} U(t-N\Delta t, x, y) C_0(y) dy + \int_{N\Delta t}^t \int_{-\infty}^{\infty} U(t-\tau, x, y) D(y, N\Delta t) \delta(\tau-N\Delta t) d\tau dy \quad \text{--- ②}$$

②式の両辺を τ で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} U(t-N\Delta t, x, y) \cdot C_0(y) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} U(t-t, x, y) D(y, N\Delta t) \delta(t-N\Delta t) dy \\ &\quad + \int_{N\Delta t}^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(t-\tau, x, y)}{\partial \tau} \cdot D(y, N\Delta t) \delta(\tau-N\Delta t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A U(t-N\Delta t, x, y) \{C_0(y) + D(y, N\Delta t)\} dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) D(y, N\Delta t) \delta(t-N\Delta t) dy \\ &= AC + D(x, N\Delta t) \delta(t-N\Delta t) \quad \text{--- ③} \end{aligned}$$

③式は, ②の解が⑧の方程式を満足していることを示している。また, Cが⑧の初期条件 $C(x, N) = C_0(x)$ を満たすことは, ②式から超関数の意味で, $\lim_{t \rightarrow N\Delta t} U(t-N\Delta t, x, y) = \delta(x-y)$ より明らかである。故に, ⑧と⑨は同値である。(Q.E.D.)

参考文献 1). 伊藤 清三「偏微分方程式」+増補版
2). C.C. Shin: Atm. Envir. Vol.4, pp389~407(1970)

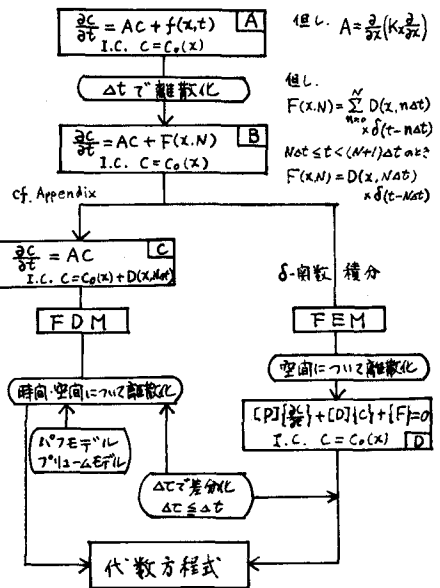


Fig-1. 煙源のモデル化

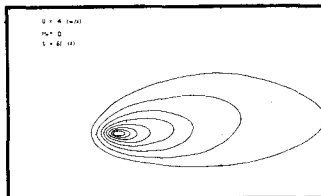


Fig-2

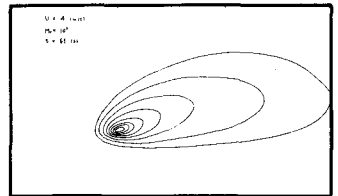


Fig-3

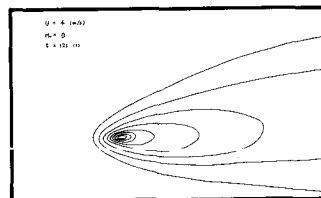


Fig-4

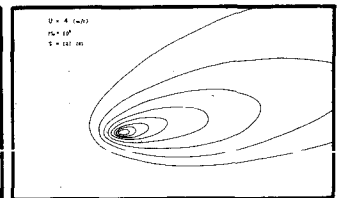


Fig-5

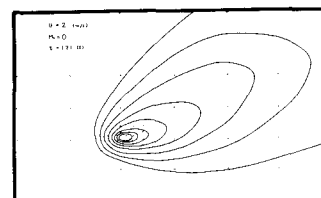


Fig-6

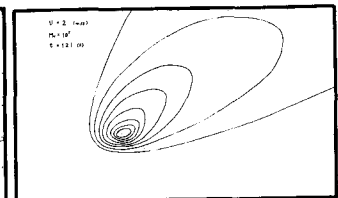


Fig-7

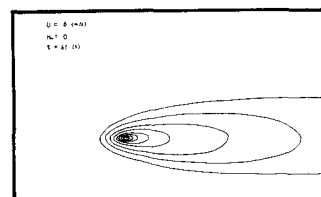


Fig-8

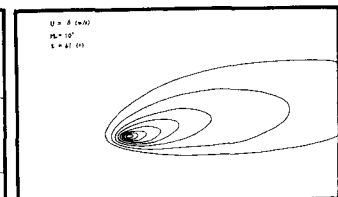


Fig-9