

山梨大学 工学部 正員 照山 修
山梨大学 工学部 正員 萩原 能男
静岡県庁 井川 孝

1. まえがき

複雑な要素の複合が流出現象の一般的な解析を困難にしているが、その基本的かつ重要な要素である表面流に注目した研究は少なくない。その多くは、流域をモデル化し力学法則に基いて記述される基礎方程式を解こうとするものである。基礎方程式は非線型となり、その解法としては、特性曲線法がその代表的方法であろう、一方、数値解析に常用される差分法においても、より合理的な手法が次々に提案され最近では Anein と Fang¹⁾ らの陰式四角差分法がある、この方法は、Courant の安定条件を満足するように用いると、計算の安定性がよいとされる、これに対して、弱変分原理である Galerkin 法を適用しようとする C. Taylor²⁾ らの研究がある、この方法は本来、二次元的な複雑な境界を有する問題において有効な方法である。本報では流域系を理想化し横流入を有する一定勾配水路に対して、上に述べた陰式四角差分法と有限要素法を用いて非線型方程式を解き、流れの本質としての非線型を考察し、単位図などの線型解析手法と比較して、後者の適用性の限界を調べるための基礎的検討を加えようとするものである。

2. 基礎方程式

幅広長方形一様断面水路の流れに対する、運動方程式と連続の方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{\partial V}{\partial h} \quad (1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (2)$$

ここに、 V : 平均流速 h : 水深 q : 水路単位長さ当たりの横流入量 B : 水路幅 S_0 : 水路床勾配

なお、Manning の抵抗則を仮定すれば $S_f = n^2 V^4 / R^{4/3}$ である。

3. 陰式四角差分法¹⁾³⁾

図-1 に示すように、 $x = x_i, x = x_{i+1}$ の縦軸と $t = t_j, t = t_{j+1}$ の横軸との交点に関する水理量をそれぞれ $d_{ij}, d_{i+1,j}, d_{i,j+1}, d_{i+1,j+1}$ として格子の中央点 M における d に関する諸量を次のように表わす。

$$d(M) = \frac{1}{4} \{ d_{ij} + d_{i+1,j} + d_{i,j+1} + d_{i+1,j+1} \} \quad \frac{\partial d(M)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta x} \{ (d_{i+1,j} + d_{i+1,j+1}) - (d_{ij} + d_{i,j+1}) \} \\ \frac{\partial d(M)}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t} \{ (d_{i,j+1} + d_{i+1,j+1}) - (d_{ij} + d_{i+1,j}) \} \quad (3)$$

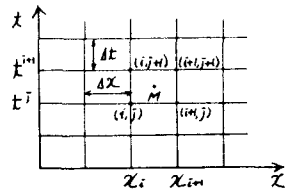


図-1

式(1)、(2)を上式のように差分化すると一般に以下のように表わされる。

$$F_i(h_{i,j}, h_{i+1,j}, V_{i,j}, V_{i+1,j}) = 0 \quad (4) \quad G_i(h_{i,j}, h_{i+1,j}, V_{i,j}, V_{i+1,j}) = 0 \quad (5)$$

上の方程式は N 個の格子点に対して、 $2(N-1)$ 個の方程式を有し、それらの方程式中に $2N$ 個の未知量を含む、従って、境界条件より 2 個の方程式 (上流端境界条件 $G_0(h_{1,j}, V_{1,j}) = 0$ 、下流端境界条件 $F_N(h_{N,j}, V_{N,j}) = 0$) が用意されれば解けることになる。これらの方程式は非線型代数方程式であるので Newton 法により収束計算を行なう。

4. 有限要素法²⁾

式(1)、(2)に Galerkin 法を適用すると以下となる。

$$\int V_e^* \left(\frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + g \frac{\partial h_e}{\partial x} - g(S_0 - S_f) - \frac{\partial V_e}{\partial h_e} \right) dx = 0 \quad (6) \quad \int h_e^* \left(\frac{\partial h_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial h_e}{\partial x} + h_e \frac{\partial V_e}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (7)$$

ここに、 h_e^*, V_e^* は重み関数、 h_e, V_e は h, V を各節点での値を用いて表わしたもので

$$V_e = \sum_{i=1}^N N_i V_i \quad h_e = \sum_{i=1}^N N_i h_i \quad V_e^* = \sum_{i=1}^N N_i V_i^* \quad h_e^* = \sum_{i=1}^N N_i h_i^*$$

また、 N は形状関数、 n は1個の要素における節点数
ある時間レベルで式(8)は $[M]\{f\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t}$ とまとめて書くことが
できる。この方程式を差分近似することにより逐次積分して解く方法
を用いる。すなわち、次の方程式を解くことになる。

$$[M]\{f\}_{t+\Delta t} = [M]\{f\}_t + \frac{\Delta t}{2} (\{F\}_{t+\Delta t} + \{F\}_t) \quad (8)$$

本論文では、初期条件として、初期流量を基底流量として射等流で
流れているものとした。また、境界条件は上流端では常に初期の基底
流量が保持されていると仮定した。すなわち、上流端での水深、流速
が時間によって変化しないとした。上に述べた2つの方法とも格子分
割に際し、次式で示される Courant の安定条件が満足されているこ
とを前提としている。 $\Delta t < \Delta x / |V + \sqrt{gH}|$
また、式(8)を解くにあたり、時刻 t における V, h の節点値を集中
化した係数マトリックスを用いた。すなわち、次式を解いた。

$$[\tilde{M}]\{f\}_{t+\Delta t} = [\tilde{M}]\{f\}_t + \frac{\Delta t}{2} (\{F\}_{t+\Delta t} + \{F\}_t) \quad (9)$$

5. 計算結果

最初に陰式四差分法と有限要素法のある単位の
横流入に対するハイドログラフの比較を行なう。最大流
量、到達時間に7%位の計算誤差が含まれた。図-3は粗
度係数 n を変化させたときのハイドログラフである、本
論文は、勾配を $1/20$ という急勾配を取扱ったために S_f
の影響が大きく、粗度係数 n による最大流量の差は顕著
に表われる。図-4より、到達時間は、横流入(降雨強度)
に反比例して遅くなる。図-5より、横流入が到達時間前
で終了するとき、横流入強度と最大流量の関係は、非線
型となる。図-6は、入力パターンの違いに対する流出の
変化の様子を調べたものである。

6. まとめ

本論文では、射流状態の不定流について数値計算
し、流れの非線型特性を調べたものであるが、常流の場
合を含めると、境界条件の設定、跳水等の問題を検討す
る必要がある。

7. 参考文献

- 1) Amin, M. and Fang, C.S.: Implicit flood routing in natural channels. Proc. ASCE, Vol. 96, HY.12, pp 2481-2500, 1970
- 2) Taylor, C., Al-Mashidai, G. and Davis, J.M.: A Finite Element Approach to Watershed Runoff, Jour. of Hydrology, Vol. 21 pp 231-246, 1974
- 3) 萩原能男:「流出現象の非定常解析」土木学会
水エニギーズ 77-A-3 1977-7

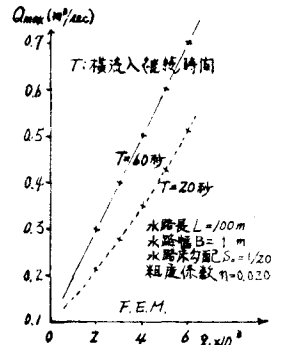
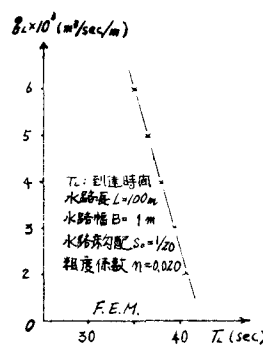
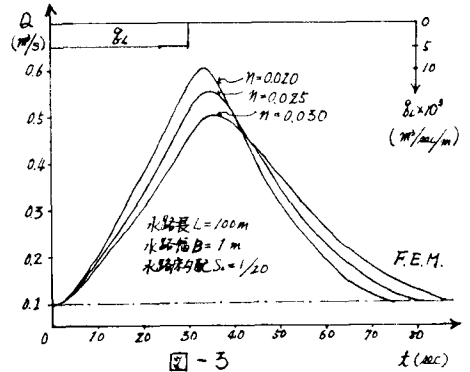
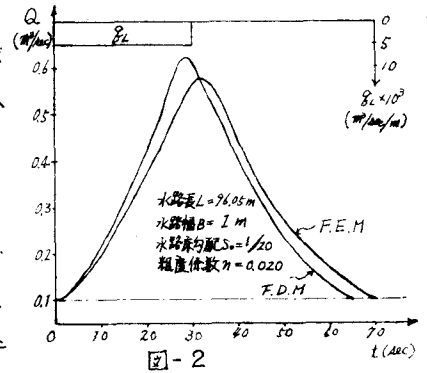


図-4

図-5

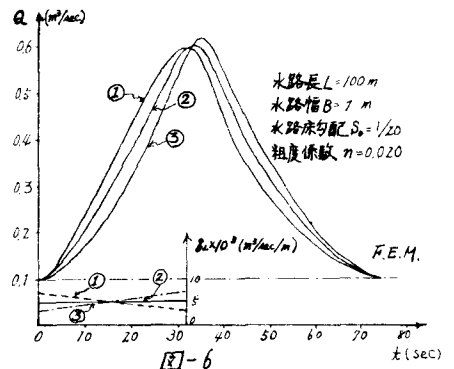


図-6