II-35　確率流量の推定に関する一考察

北海道大学工学部　正員　○　藤田　睦博
北海道大学工学部　正員　　　星　　清

1　まえがき　　雨量から確率流量を算定する場合、降雨配分過程が問題となる。すなわち、確率雨量 R はT時間雨量で与えられ、時間 Tをn分割した降雨配分量は $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n = R$ ....(1) を満足する。雨量の最小単位を適当に定めると、x_i, Rを整数として扱うことができる。石原、友杉[1]は (1) 式において$x_i \geq 0$の場合の最大配分値等の理論分布特性を得ている。一方、今井、鈴木[2]は多数の実測資料を用いて短時間降雨量（1分～2時間程度）の平均的コレログラムを作製している。その結果によれば、短時間降雨量はかなり強い持続性をもち、自己相関係数ρ(τ)は次式で近似されうる。

$\rho(\tau) = \exp(-\alpha\tau)\cos\beta\tau$　(α, β; constant) .....(2)　したがって、雨量配分過程を考える時、(1)式と (2)式を同時に満足する確率モデルを用いるべきであろう。本報告は、確率流量の算定にあたって最初に雨量配分過程について検討するものである。

2　雨量配分確率モデル　　最初に (1) 式の単位時間雨量 x_i の特性について述べる。(1) 式において $x_i \geq q$ なる総配分数 p は次式で計算される。

$$p = \binom{R+n-nq-1}{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

したがって、(1) 式を満足する x_iはp 通りあり、その要素は x_{ij} ($i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,p$) で与えられる。i 時刻の雨量 x_i の各種の統計量を表－1 に示す。表－1 の結果は、p 個の配分がそれぞれ等確率で生起したものとして求めたものであり、x_i は同一の確率分布に従がい、しかも x_i とx_k ($i \neq k$) の相関係数は一定である。(3) 式による p個の配分数のうちには、数値の配列順序を問わなければ要素の組合せが同一となるパターンが数種類存在する。この要素の組合せが同一となるパターンをここでは基本パターンと呼ぶことにする。n と R が与えられた時の基本パターンを求める式が表－2 に示される。また、基本パターンの分散の最大値および最小値は表－3 に示されている。基本パターンが表－2 に示される式によって決定されれば、基本パターン配分数、第i 位最大配分値のヒストグラムを容易に求めることができる。その一例として、n = 12, R = 15の場合の基本パターン、基本パターン配分数、および基本パターンの分散が表－4 に示されている。また、基本パターン配分数の合計は、(3) 式においてn =12, R=15, q =1 とした時のp =364に等しい。

表－1　x_iのアンサンブル統計量

q	$E(x_i)$	$Var(x_i)$	$E\{[x_i-E(x_i)]^3\}$	Correlation Co.
0	$\frac{R}{n}$	$\frac{R(R+n)(n-1)}{n^2(n+1)}$	$\frac{R(2R+n)(R+n)(n-1)(n-2)}{n^3(n+1)(n+2)}$	$-\frac{1}{(n-1)}$
1	$\frac{R}{n}$	$\frac{R(R-n)(n-1)}{n^2(n+1)}$	$\frac{R(2R-n)(R-n)(n-1)(n-2)}{n^3(n+1)(n+2)}$	$-\frac{1}{(n-1)}$

表－2　基本パターン式

$$A_1 = w + 1 - \sum_{k=3}^{j}(k-1)M_k - i$$

$$A_2 = 1 + \sum_{k=3}^{j} M_k + i$$

$$A_m = 1 + \sum_{k=m}^{j} M_k \qquad 3 \leq m \leq j$$

$$A_m = 1 \qquad j+1 \leq m \leq n$$

where

$w = R - n$, $3 \leq j \leq n$, $3 \leq k \leq j-1$,

$1 \leq M_j \leq [w/j]$,

$0 \leq M_k \leq [(w - \sum_{i=k+1}^{j} i M_i)/k]$, and

$0 \leq i \leq [(w - \sum_{k=3}^{j} k M_k)/2]$

[.]: Gaussian operator

$$\left\{\begin{array}{ll} A_1 = 1 + w - i & \\ A_2 = i + 1 & \\ A_m = 1 & 3 \leq m \end{array}\right\} \quad \text{for } j = 2$$

where $0 \leq i \leq [w/2]$

3　変換過程モデル　　(1) 式による降雨配分過程には2つの問題点がある。第一の問題点は配分された降雨系列 x_iの自己相関係数が$-1/(n-1)$となり、実測短時間降雨量系列による (2) 式の自己相関係数とは異なる。第二の問題点は、表－1 から計算されるように R >>nの時、q =0, 1 ともに、降雨配分量x_i の変動係数が1 より小となる。一方、我々は降雨資料によって単位時間が小さくなるにつれて降雨変動が大きくなることを経験的に知っている。したがって、(1) 式だけによる降雨配分過程には、現実の降雨特性にそぐわない点があると言よう。そこで、降雨配分過程に (2)式の

表－3　基本パターン最大、最小分散値

$$\sigma^2_{max} = \{(R-n+1)^2 + (n-1)\}/n - R^2/n^2$$

$$\sigma^2_{min} = \begin{cases} \{(1+[R/n])^2(R-n[R/n]) + R^2(n-R+n[R/n])\}/n - R^2/n^2 & \text{for } R \neq n[R/n] \\ ([R/n])^2 - R^2/n^2 = 0 & \text{for } R = n[R/n] \end{cases}$$

where

σ^2_{max} ; maximum variance of a basic pattern

[.] ; Gaussian operator

q (minimum rainfall unit) = 1

時系列特性を有する変換過程を考える。(1)式で配分された雨量系列 x_i の標準化変量系列を X_i とし、(2)式の特性を持つ標準化変量変換系列を Y_i とする。X_i は p 個の配分数をもつから Y_i も同数の配分数を持ち、その要素は Y_{ij} $(i=1,\ldots,n;j=1,2,\ldots,p)$ で与えられる。その変換系を次式で定義する。

$Y = A X$ ......(4)　ここで、X,Y はそれぞれ n次列ベクトル、A は n次正方行列である。変換係数行列A は次式で同定される。$A = B C^{-1}$ ....(5)　$D_Y = A D_X A^T$ ....(6)

$D_Y = B B^T$.....(7)　$D_X = C C^T$ .....(8)　ここで、D_Y, D_X はそれぞれ、系列 Y, X の相関係数行列である。行列B と C はそれぞれ、D_Y, D_X の固有値および固有ベクトルから決定できる (C^{-1}; C の逆行列)。

4　解析例

(3)式の雨量配分数は R と n の差が大きくなるにつれて幾何級数的に増加する。変換降雨配分量 Y_i についての最大配分量等の理論分布特性はまだ得られていないので、以下に表－4 に示されるn=12, R=15の例についての数値実験の結果を示す。この数値実験の主目的は、総配分数 p =364を2 分割した時どちらの分割群がより母集団 (364)の特性、すなわち、時間最大、および3 時間連続最大降雨量の分布を再現しているかを調べることにある。

2 分割方法は表－4において、分散の大なるパターンの標本数を p_1 とし、残りの標本数を p_2 とした。また、Y_i 雨量系列を定常一次マルコフ過程としLag－one (ρ_1)=0.9, 0.7, 0.5, および0.3 の母数を与えて変動特性を調べた。表－5には、3 種の分割群によるアンサンブル統計量を計算してそれを時間平均した値が示されている。母集団 (p) の平均値は0 であるから p_1, p_2 分割群による $\overline{U}$ (平均値) の絶対値は等しい。p_1 の方が p_2 より変動が大なる雨量系列 (x_i) を持っているから p_1 の変動が大なることは予想される。Lag－one相関係数で比較すると p_1 の方が母集団のそれより大であり、p_2 は小である。変換降雨系列 Y_i の時間および3 時間連続最大降雨量が分割群 (p, p_1, p_2)を変えた時どうなるかを3 次までの積率で比較して、表－6に示す。なお、括弧内の数値は3 時間連続最大降雨量の統計量である。まず、変動特性を比較すると、p_1 分割群の方が p_2 分割群より表－5の結果を反映して、母集団特性値に対して大きな値を持つことがわかる。しかしながら、Skewness を比較してみると、p_1 分割群 の時間および3 時間連続最大降雨量の分布形が母集団 (p) のそれらの分布形を実用上十分な精度で近似しうることを示している。このことはR とn の差が大となって総配分数 p が増加しても、表－4に示されるような分散が大となる基本パターンをいくつか選択すれば母集団の所要特性値を大差なく算定できることを意味する。次にLag－one相関係数の影響を考察する。時間最大降雨量の平均値は ρ_1 が小になるにつれて、すなわち、ランダム性が強くなるにつれて、大となることは予想できる。しかしながら、分散は ρ_1=0.5で最大となっている。3 時間連続最大降雨量では、平均値の最大は ρ_1=0.7で、分散の最大は ρ_1=0.5で起っている。表－7に3 時間連続最大降雨量に時間最大降雨量が含まれる割合を示す。ρ_1 が小になるにつれて時間最大値の占有率が減少している。

表－4 n=12、R=15の基本パターン

Basic pattern	x_1	x_2	x_3 ..... x_i ..... x_{12}	No. of patterns	Variance
1	4	1	1 ..... 1 1	12	0.688
2	3	2	1 ..... 1 1	132	0.354
3	2	2	2 ..1.. 1 1	220	0.188

表－5 標本数の差による統計量変動

Statistics \ Sample Size	p = 364	p_1 = 182	p_2 = 182
Mean($\bar{U}$)	0.0	0.045	-0.045
St.De.($\bar{S}$)	1.0	1.117	0.871
Lag-one($\bar{\rho}_1$)	0.9	0.896	0.907
Mean($\bar{U}$)	0.0	0.029	-0.029
St.De.($\bar{S}$)	1.0	1.124	0.862
Lag-one($\bar{\rho}_1$)	0.7	0.690	0.717
Mean($\bar{U}$)	0.0	0.020	-0.020
St.De.($\bar{S}$)	1.0	1.296	0.855
Lag-one($\bar{\rho}_1$)	0.5	0.486	0.523
Mean($\bar{U}$)	0.0	0.014	-0.014
St.De.($\bar{S}$)	1.0	1.346	0.849
Lag-one($\bar{\rho}_1$)	0.3	0.288	0.321

表－6 Y_i 系列の標本数の差による時間、3時間最大配分量の統計量変動

Statistics \ Sample Size		p = 364	p_1 = 182	p_2 = 182
ρ_1 =0.9	Mean	1.22 (2.92)	1.31 (3.05)	1.12 (2.76)
	St.De.	0.42 (1.30)	0.48 (1.54)	0.29 (0.93)
	Skew	1.32 (1.03)	1.44 (1.23)	-1.01 (-1.27)
ρ_1 =0.7	Mean	1.46 (3.09)	1.64 (3.42)	1.26 (2.75)
	St.De.	0.57 (1.79)	0.63 (2.08)	0.42 (1.35)
	Skew	0.93 (0.79)	1.10 (0.97)	-0.85 (-0.99)
ρ_1 =0.5	Mean	1.47 (2.67)	1.71 (3.12)	1.24 (2.24)
	St.De.	0.65 (1.95)	0.64 (2.12)	0.56 (1.67)
	Skew	-0.06 (0.21)	-0.01 (0.48)	-0.57 (-0.74)
ρ_1 =0.3	Mean	1.55 (2.57)	1.80 (2.96)	1.32 (2.20)
	St.De.	0.61 (1.75)	0.61 (1.95)	0.51 (1.45)
	Skew	-0.11 (0.07)	-0.30 (0.05)	-0.46 (-0.48)

Numbers in parentheses are the statistics for 3-hour maximum rainfall.

表－7 3 時間連続最大降雨量の内に時間最大降雨量を含む割合

ρ_1=0.9	ρ_1=0.7	ρ_1=0.5	ρ_1=0.3
80.8 %	80.0	79.1 %	75.8 %

参考文献 1) 石原安雄,友杉邦雄：降雨の時間配分に関する確率論的考察,京大防災研究所年報,14B, 1971。 2) 鈴木栄一：気象統計学,pp.153,地人書館,1970。