

1. 本研究の目的と概要

事前の降雨情報に基づいた雨量予測は、従来はほとんど経験的にのみ処理されてきたし、理論的解析が計られる場合でも、降雨量時系列の確率統計的特性の配慮に乏しかったといえよう。本研究は、雨量時系列を定常・従属なガンマ分布に従うと仮定して、比の分布を理論的に誘導し、その成果を活用した統計的予測を提案するものである。理論的成果として、比の累積分布が、相関母数・形状母数にかかわらず、不完全ベータ関数比で統一的な表現が可能であることを明確にした。また、理論の検証を、名古屋の短時間豪雨を対象とした豪雨時系列のピーク前1時間を既知として、ピーク後1時間雨量の予測で行うと考え、比の経験分布と理論分布とが、その密度分布や累積分布に関して、極めて良好な合致を示すことによって理論の有用性を確かめた。

2. 二変数ガンマ型変量の比の理論分布

2.1 比の密度分布の誘導 x_1, x_2 をピークをはさんだ後・前の等期間雨量にとり、これらを定常時系列と仮定し、 x_1 と x_2 の結合分布を形状母数、尺度母数の共通な二変数ガンマ分布と考える。また、以後の議論はすべて比で行うから、 x_1, x_2 はその規準化変数 $\xi = x_1/\beta_1, \eta = x_2/\beta_2$ ($\beta_1, \beta_2: x_1, x_2$ の尺度母数) で代換して差しつかえない。こうした規準化二変数ガンマ分布の結合密度分布は次式で与えられている。

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}} \exp\left(-\frac{\xi+\eta}{1-\rho}\right) \cdot (\xi\eta)^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\xi\eta}\right) \quad (1)$$

ここに、 $\Gamma(\nu)$: ガンマ関数、 $I_\nu(x)$: オー種変形ベッセル関数、 ν : 形状母数、 ρ : 相関母数 である。

ξ, η の比 $\zeta = \xi/\eta$ の密度分布は、成分 η が非負なことなどにより、若干の演算の後次式となる。

$$f(\zeta) = \int_0^\infty \eta \cdot f(\zeta\eta, \eta) d\eta = B(\nu, \nu)^{-1} \cdot (1-\rho)^\nu \zeta^{\nu-1} (\zeta+1) \{(\zeta+1)^2 - 4\rho\zeta\}^{-\nu-1/2} \quad (2)$$

ただし $B(\nu, \nu) = \Gamma(\nu)^2/\Gamma(2\nu)$ である。なお、尺度母数の等しいという前提は、 $\zeta = (x_1/\beta_1)/(x_2/\beta_2)$ より、規準化さえしておけば、必ずしも $\beta_1 = \beta_2$ である必要はないわけである。

2.2 比の密度分布の理論特性 比の密度分布は形状母数 ν と相関母数 ρ の関数である。これら母数の代表的な値についての計算結果を図-1, 2 に示す。このように、 $\nu \leq 1$ と $\nu > 1$ で性質は大きく相違する。

- i) $\nu \leq 1$ では ρ の小さいときは単調減少するが、 ρ の増加に伴って次第に極大値が生じ、顕著になっていく。
- ii) $\nu > 1$ では、 ρ の値にかかわらず、 $f(0) = 0$ および、 ρ の増加に伴ってピークの顕著な単峰の形状となる。

3. 比の累積分布の不完全ベータ関数比による表示

途中の演算は省略するが、以上の $f(\zeta)$ を変形していくと、対称なベータ分布に帰着することが示されるので、その累積分布は、ベータ分布を積分した形として、以下のように表わされる。

$$F_x(x; \nu) = B_x(\nu, \nu)/B(\nu, \nu) \equiv I_x(\nu, \nu) \quad (3) \quad B_x(p, q) = \int_0^x x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (4)$$

$B_x(p, q)$: 不完全ベータ関数、 $I_x(p, q)$: 不完全ベータ関数比で数表が出版されている。

積分上限値 x ともとの変数 ζ の関係は

$$x = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{\zeta} - (\sqrt{\zeta})^{-1}}{(\sqrt{\zeta} + (\sqrt{\zeta})^{-1})^2 - 4\rho} \right]^{1/2} \quad (5)$$

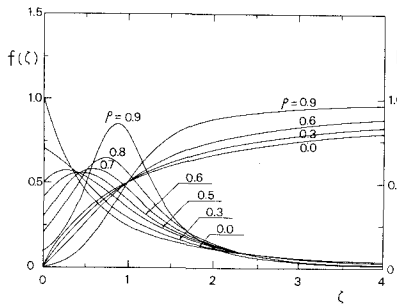


図-1 比の理論分布 ($\nu = 1$ の場合)

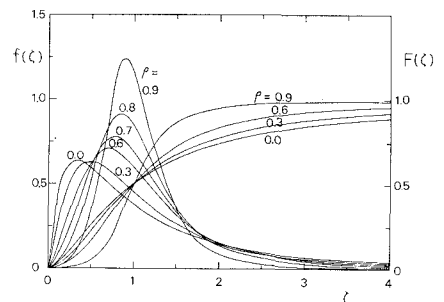


図-2 比の理論分布 ($\nu = 2$ の場合)

また、 x, ζ の累積分布の相互関係は、 $F_x(x; \nu) = 1 - F_\zeta(\zeta; \nu)$ (6) の補足的な関係である。

そこで、この結果を利用すれば、不完全ベータ関数表などの数表などによって、任意の ν, p に対する累積分布は容易に計算できる。つぎに、 $\nu = 1, 2$ の累積分布の例を、前出の図-1, 2 に併記しておいた。

4. 理論の短時間豪雨予測への適用

4.1 標本の抽出 具体的な標本の選出はつぎのようにした。i) 1939~1968年の30年間で、比較的多雨な5~10月の名古屋の時間記録によった。ii) 豪雨基準として、2時間最大雨量が15mm以上かつ6時間以上継続するものを採用し、これを後・前1時間ごとに分け、それぞれの雨量を x_1, x_2 とした。iii) 抽出された標本の総数は173で、これを気象原因別に分類すると、台風50、梅雨61、寒冷・温暖前線33、雷雨19、不明10であった。iv) 東海地方における重要性や資料数からみて、計算は、気象原因を総合した場合と台風・梅雨について行った。

4.2 母数推定法と推定結果 二変数ガンマ分布の母数推定には最尤解と積率解があるが、ここでは精度はあまり必要でないとして、簡便な全標本とみなした積率解を使った。具体的な計算式は以下によった。

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= (\hat{\nu}_1 + \hat{\nu}_2) / 2, \quad \hat{\nu}_i = (\bar{x}_i)^2 / \{ \overline{(x_i)^2} - (\bar{x}_i)^2 \}, \quad \hat{\beta}_i = \{ \overline{(x_i)^2} - (\bar{x}_i)^2 \} / \bar{x}_i \quad (i=1, 2) \\ \hat{\rho} &= (\bar{x}_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2) / \sqrt{(\overline{(x_1)^2} - (\bar{x}_1)^2)} \sqrt{(\overline{(x_2)^2} - (\bar{x}_2)^2)} \end{aligned} \quad (7)$$

すなわち、形状母数はい異なる場合の解の平均を採用している。これらの計算結果を表-1に示す。

つぎに、これより x_1, x_2 の周辺分布をこれら3ケースについて、雨量階層別の相対頻度としての経験分布(ヒストグラム)と理論分布(曲線)で図-3に示す。なお図中の記号 m, s^2 はそれぞれ標本の平均、分散である。図より、ガンマ分布近似の妥当性と x_1, x_2 の対称性がほぼ満足されていることが判る。

分類	$\hat{\nu}_1$	$\hat{\nu}_2$	$\hat{\nu}$	$\hat{\rho}$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	標本比
総合	3.01	2.32	2.67	0.24	4.35	5.82	100%
台風	3.85	2.18	3.02	0.48	3.78	6.70	28.9
梅雨	2.44	2.53	2.48	0.31	5.49	5.84	35.2

表-1 母数の標本推定値

4.3 比の累積分布の経験分布と理論分布 経験分布としての累積分布をできるだけ忠実に再現するために、Plotting Position法を流用する。比の値 ζ を小さい順に、 $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ とし、 i 番目順序統計量 ζ_i ($i=1, 2, \dots, n$) に対する累積分布の値をThomas Plot $F(\zeta_i) = i / (n+1)$ ($i=1, 2, \dots, n$) (8) で表記する。

これに対して、理論分布は、所与の母数について、数表などから求める。具体的には、まず所与の ρ より式(5)で $\alpha = 0(0.01)1$ に対する ζ を逆算する。他方、 ν に対する $I_x(\nu, \nu)$ は、ある等差間隔の ν については数表化されているので、所与の ν に対しては、ここでは4点Lagrange補間内で挿して求めている。計算結果を図-4に示す。これより、経験分布は理論分布と極めて良く合致し、しかも、この理論分布モデルの特徴である $\zeta = 1, F = 0.5$ をほぼ通っていることが認められ、こうした統計的予測の有用性が検証される。

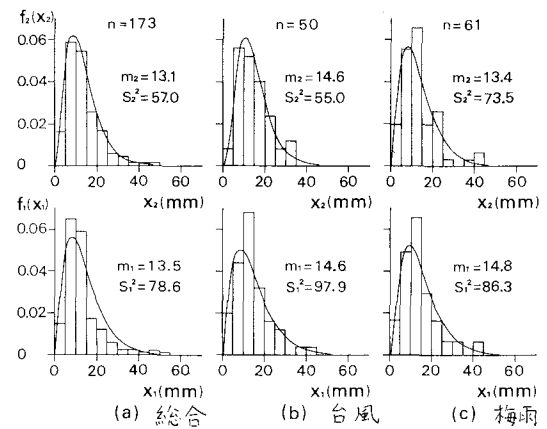


図-3 周辺分布に対する経験分布と理論分布

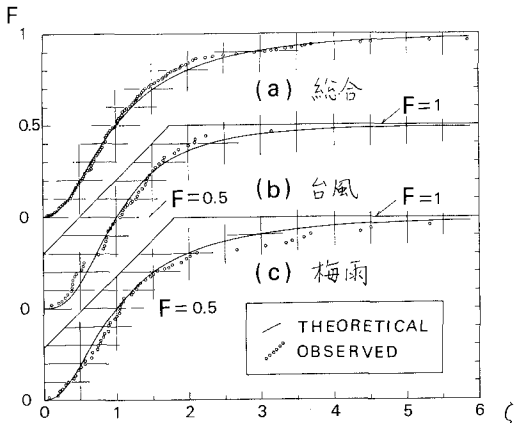


図-4 累積分布に対する経験分布と理論分布